JAHRES-BERICHT ÜBER DIE KÖNIGLICHE REALSCHULE, VORSCHULE UND ELISABETHSCHULE

Realschule (Berlin, Germany)



über

die Königliche

Realschule, Vorschule und Elisabethschule zu Berlin,

womit zu den

Schulfeierlichkeiten,

welche

am 22. und 23. März 1872

im Hörsaale der Königlichen Realschule stattfinden werden,

ehrerbietigst einladet

der

Director Ranke.

Voran geht: „Das Problem der Tautochronen", von Dr. C. Ohrtmann.

Berlin, 1872.

Druck von A. W. Hayn's Erben.
(C. Hayn, Hof-Buchdrucker.)

Das Problem der Tautochronen.

Ein historischer Versuch

von

Dr. Carl Ohrtmann.

Die Geschichte der Mathematik ist ein Feld, das von den Gelehrten unserer Zeit im Allgemeinen arg vernachlässigt wird. Außer den älteren Geschichten der Mathematik, wie der von Kästner oder der von Montucla, die beide dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft wohl nicht mehr recht entsprechen dürften, finden sich fast nur in den Lebensbeschreibungen berühmter Mathematiker Andeutungen über deren wissenschaftlichen Entwickelungsgang. Trotz des großen Interesses jedoch, das diese Darstellungen haben, ist das noch keine Geschichte der Mathematik. Denn so wichtig auch der Entwickelungsgang eines einzelnen Mannes für die Wissenschaft ist, es bleibt immer nur das Bild eines einzelnen Forschers, nicht das Bild der Gesammtentwickelung, das wir erhalten. Und ein Bild der Gesammtentwickelung soll doch eine Geschichte der Mathematik geben. Sie muß zeigen, wie aus den einfachsten Anfängen heraus, im Anschlusse an die praktischen Bedürfnisse zuerst, dann frei und selbstständig, sich loslösend von dem Leben, ein Problem sich an das andere reiht, ein gewonnener Satz einen andern nach sich zieht, der Fortschritt auf dem einen Gebiete den Fortschritt auf einem anderen bedingt. Nach dieser Richtung hin aber fehlt es in der Literatur der Mathematik noch an allem Material — wenigstens ist dem Verfasser trotz vieler Nachforschungen und Fragen bisher nichts der Art bekannt geworden. — Erst ganz neuerdings hat sich eine Anzahl Gelehrter gefunden, die, angeregt wie es scheint, von der Gründung des speciell diesem Theile gelehrter Forschungen gewidmeten: „Bulletino di Storia e di Bibliografia di scienze matematiche e fisiche" durch den Fürsten Boncompagni in Rom, auch der Geschichte der Mathematik ihre Thätigkeit zugewandt haben. Aber auch die meisten dieser Arbeiten, wir nennen beispielsweise die von Friedlein, Curtze, Bretschneider u. a. m., haben fast durchgängig die Geschichte der ältesten und mittelalterlichen Mathematik zum Thema, einen Theil der Geschichte, der, so interessant er auch ist, doch nur einen kleinen Bruchtheil des Gebietes umfaßt, und häufig sogar mehr von philologischem, als mathematischem Interesse getragen wird. Geschichtliche Behandlungen einzelner Abschnitte oder Probleme von ihrem ersten Auftreten bis in die neuere Zeit fehlen fast gänzlich. Dem Verfasser wenigstens sind in dieser Richtung trotz vielen Suchens nur sehr vereinzelte bekannt geworden. Die Gründe, woher die Vernachlässigung oder dieses Vorurtheil gegen einen wesentlichen Theil der Wissenschaft unter den Mathematikern entstanden sei, zu untersuchen, liegt dem Verfasser fern, um so ferner, als sie zum Theil in einer Ent-

wickelungsseite unseres ganzen wissenschaftlichen Lebens ihren Grund haben möchten, deren Besprechung hier wohl nicht am Platze sein dürfte. Mag der Grund aber auch liegen, wo er will, jedenfalls dürfte feststehen, daß diese Seite wissenschaftlicher Arbeit nicht die genügende Beachtung findet. Denn selbst in wissenschaftlichen Abhandlungen, die neue selbstständige Untersuchungen ihrer Verfasser enthalten, findet sich nur selten ein Resumé über den vorherigen Verlauf der einschlagenden Frage. Und doch kann dem fühlbaren Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Geschichte der Mathematik erst abgeholfen werden, wenn eine große Anzahl einzelner Abschnitte und Probleme in Monographien historisch bearbeitet ist. Ohne derartige Vorarbeiten ist das zu beherrschende Material ein zu gewaltiges, um in der kurzen Zeit eines Menschenlebens überwältigt zu werden. Schon bei einem einzelnen Problem gehört ein großer Zeitaufwand dazu, um einen Ueberblick über den historischen Entwickelungsgang zu gewinnen, ganz abgesehen davon, daß es für einen einzelnen Menschen unmöglich sein würde, sich die Literatur in ihrem ganzen Umfange zusammenzusuchen. Dieselbe ist ja gerade in der Mathematik fast völlig in Journalen und den Publicationen gelehrter Körperschaften zerstreut. Sammelwerke aber oder sonstige größere Werke, die neben dem Stoff auch Quellenangaben enthielten, fehlen gänzlich. Selbst Poggendorffs „Biographisches Wörterbuch der exacten Wissenschaften", ja selbst das große neuerdings von der Londoner Royal Society herausgegebene Sammelwerk entsprechen dem Bedürfniß keineswegs, da sie nur biographisch, nicht sachlich geordnet sind.

Diese Betrachtungen sind es, die den Verfasser veranlaßt haben, einen Versuch mit der Geschichte eines einzelnen Problems, des Problems der Tautochronen, zu wagen. Daß es ihm noch nicht gelungen, zu erreichen, was er erstrebte, dessen ist er sich wohl bewußt. Es ist eben ein erster Versuch, und als solchen bittet er die Arbeit zu betrachten.

Das Problem der Tautochronen, von dessen historischem Entwickelungsgange wir im Folgenden ein Bild geben wollen, läßt sich allgemein so aussprechen: „Ein Punkt bewegt sich, von einer Kraft getrieben, auf einer Curve und findet dabei, sei es durch das Mittel, in dem sich die Bewegung vollzieht, sei es durch die Reibung, einen Widerstand, der gleich einer gegebenen Function der Geschwindigkeit ist. Man soll die Gleichung der Curve finden, für welche die Zeit eine gegebene Function des Bogens ist." Das Problem ist nicht von allen Bearbeitern in derselben Weise aufgefaßt worden. Wie man einerseits sich die Aufgabe gestellt hatte, die Gleichung der Curve zu bestimmen, so suchte man andererseits zu ergründen, wie denn die Kraft beschaffen sein müsse, die im Stande sei, dem aufgestellten Problem zu genügen. Daß das Problem überhaupt nicht von vornherein in der allgemeinen Form, in der wir es ausgesprochen, an die Mathematiker herangetreten ist, bedarf wohl kaum einer Erwähnung. Kann man doch in Zweifel sein, ob es so überhaupt noch zu dem Probleme der „Tautochronen" gehöre. Wenn wir es trotzdem so ausgesprochen, so liegt der Grund darin, daß es sich allmählig dahin verallgemeinert hat und gerade von den neuesten Bearbeitern in dieser Art aufgestellt ist. —

Wie die Geometrie aus dem praktischen Bedürfnisse der Feldmeßkunst zuerst bei den Aegyptern entstand und dann erst, nach Griechenland gekommen, sich von der Praxis befreite, so war es auch bei unserem Problem zunächst eine Forderung der Praxis, die das erste Auftreten veranlaßte. Sobald es indeß nur erst aufgetaucht, löste es sich los von dem praktischen Leben, um als rein wissenschaftliche

Frage von den Mathematikern behandelt zu werden. Die Uhrmacherkunst ist es in unserem Falle gewesen, die von Seiten der Praxis das Problem aufgestellt hat. Bei der Construction der Pendeluhren wurde Huyghens auf den nicht absoluten Isochronismus der Pendelschwingungen aufmerksam. Er suchte daher eine Curve, auf der die Schwingungen in mathematisch gleichen Zeiten erfolgen. Die Mittel aber, die zu Huyghens Zeiten die Mathematik darbot, erlaubten nur die Behandlung des einfachsten Falles, des Falles nämlich, wo bei constanter Schwerkraft die Bewegung im leeren Raume und ohne Reibung stattfindet. Aber nicht lange Zeit verging, so gingen auch andere Mathematiker an die Bearbeitung unseres Problems. Newton und Jacob Herrmann versuchten sich zunächst an demselben. Es gelang ihnen in der That, einen Schritt vorwärts zu kommen, indem sie an Stelle der Schwerkraft ein anziehendes Centrum setzten. Auch den Widerstand des umgebenden Mittels konnten sie schon berücksichtigen, freilich nur für den Fall, daß dasselbe der Geschwindigkeit einfach proportional sei. Erst nachdem die Analysis durch Leibniz in ein neues Stadium ihrer Entwickelung getreten war, gelang es fast gleichzeitig Euler und Jean Bernoulli, das Problem unter der Voraussetzung eines complicirteren Widerstandsgesetzes zu überwältigen. Necker war es dann, der an Stelle des Widerstandes, welchen das Mittel, in dem sich die Bewegung vollzieht, leistet, die Reibung auf der Curve berücksichtigte. Mit Hülfe der Fluxiodifferentialrechnung, die bei Bearbeitung des Problems der Tractorien vielfach benutzt worden war, suchte Fontaine dem Probleme für eine beliebige Kraft beizukommen, aber die allgemeine Lösung für ein beliebiges Widerstandsgesetz erreichte er noch nicht. Nur für den Fall, daß der Widerstand eine Function zweiten Grades der Geschwindigkeit sei, konnte er die Gleichungen lösen, die die Bedingungen der Aufgabe lieferten. Lagrange faßte das Problem in etwas anderer Weise auf. Er wollte die allgemeinen Eigenschaften der Kraft ermitteln, für die ein Tautochronismus möglich sei. Noch in anderer Weise bezeichnet Lagrange einen Wendepunkt in der Geschichte unseres Problems. Bis dahin war das Problem von den Bearbeitern in seiner Reinheit, wenn man sich dieses Ausdrucks hier bedienen darf, aufgefaßt worden. Man verlangte stets wirklichen Tautochronismus, d. h. Constanz der Zeit. Bei Lagrange dagegen tritt jetzt allgemeiner die Forderung auf, daß die Zeit eine gegebene Function des Bogens sei. Der Versuch, die Aufgabe in dieser Verallgemeinerung zu lösen, gelang ihm jedoch nur theilweise. Seine Lösung, die er für allgemein hielt, war dies nicht. Schon zu Lebzeiten erfuhr er Angriffe in dieser Beziehung. Und in der That ist seine Lösung, wie wir sehen werden, nicht so allgemein gewesen, wie er glaubte Aber ein wesentlicher Fortschritt war mit dieser Verallgemeinerung gemacht. Denn an diese Verallgemeinerung schließen sich die späteren Arbeiten an, nachdem die von Euler und Lagrange angebahnten Fortschritte in der Analysis durch Gauß und andere Mathematiker ihre weitere Fortbildung empfangen hatten. Laplace war im Stande, das Problem für constante Schwere, bei einem Widerstande, der eine quadratische Function der Geschwindigkeit ist, zu lösen, während Abel allerdings vom Widerstande absah, dagegen aber der Forderung, daß die Zeit eine gegebene Function des Bogens sei, mit Hülfe der Euler'schen Integrale zu genügen vermochte. An die Leistungen dieser beiden berühmten Mathematiker knüpfen dann die neuesten Arbeiten an, die Meissel's, indem er an Stelle der constanten Schwerkraft ein anziehendes Centrum substituirte, und Somoff's, indem er eine beliebige Kraft mit einem Potential wirken ließ. Brioschi leitete dann die Formel ab, die Lagrange's Lösung als speciellen Fall enthält. Hoppe endlich kehrte zum reinen Tautochronismus zurück, machte dafür auf die verschiedenen Arten von tautochronischen Curven aufmerksam, die bis dahin noch von keinem Bearbeiter in dieser Strenge aufgefaßt waren.

Dies ist in kurzen Zügen der allgemeine Gang, den die Entwickelung des Problems genommen. Wenden wir uns nun speciell zu den einzelnen Arbeiten.

Der erste Mathematiker, bei dem das Problem auftritt, ist, wie oben bemerkt, Huyghens gewesen. Im Jahre 1673 erschien sein berühmtes Werk, „De Horologio oscillatorio", in welchem er seine Erfindungen betreffs der Pendeluhren niedergelegt hat. Im Anschluß an seine Untersuchungen über den Isochronismus der Pendelschwingungen behandelt er in der Prop. XXV. Pars II. das Problem des Tautochronismus in seiner einfachsten Form, d. h. er suchte die Gestalt der Curve zu bestimmen, auf der sich ein Körper bewegen muß, um immer in gleichen Zeiten zu dem tiefsten Punkte zu gelangen, von welchem Punkte aus auch sein Fall begonnen haben möge. Er fand die Cycloide als die Curve, die dieser Forderung genügt. Sein Beweis dafür*) beruht auf folgendem Satze: Wenn ein Körper gegen einen Punkt bewegt wird durch eine Kraft, die stets der Entfernung von demselben proportional ist, so wird er immer zu derselben Zeit zu diesem Punkte gelangen, wo er auch seine Bewegung begonnen haben mag. Dieser Satz aber findet seine Anwendung bei einem Körper, der sich längs einer Cycloide bewegt. Denn die Tangenten an einen Punkt der Cycloide sind stets den Sehnen parallel, welche man in dem erzeugenden Kreise nach dem Punkte gleicher Höhe zieht, wenn man die im tiefsten Punkte gezogene Vertikale als Durchmesser nimmt. Diese Sehnen aber werden in gleichen Zeiten durchlaufen. Die Kräfte, mit denen ein Körper im Anfang einer Sehne bewegt wird, verhalten sich aber wie die Sehnen. Da nun aber die Cycloidenbogen doppelt so groß sind, wie die Sehnen, so findet obiger Satz hier seine Anwendung. Die Art, in der Huyghens die Bewegung in einer Cycloide hervorbrachte, ist, soweit sich aus den Bemerkungen Montucla's ersehen läßt, dieselbe, die auch Newton angewandt hat. Dieser war es zunächst, der sich mit unserem Probleme beschäftigte. Sectio X des ersten Buches in den: „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" ist diesem Gegenstande gewidmet. Er stellt sich dort in Prop. L. folgendes Problem: „Facere ut corpus pendulum oscilletur in cycloide data." Die Art, in der er das Problem löst, ist die bekannte, daß er den beweglichen Faden des Pendels beim Oscilliren sich an einen Cycloidenbogen anlegen läßt. Den Isochronismus dieser Bewegung beweist er dann durch den in Prop. LI. aufgestellten Satz, den er folgendermaßen ausspricht: „Si vis centripeta tendens undique ad globi centrum *C* sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, et hac sola vi agente corpus *T* oscilletur in perimetro cycloidis *QRS*: dico quod oscillationum utcunque inaequalium aequalia erunt tempora." Auch er beweist zunächst, daß die Geschwindigkeiten an den einzelnen Stellen der Bewegung sich immer wie die noch zu beschreibenden Bogen verhalten, führt den Beweis also auf denselben Satz zurück, den auch Huyghens benutzt hatte. Er war aber insofern einen Schritt weiter gegangen, als er nicht mehr eine constante Schwerkraft, sondern eine Kraft annahm, die, von einem festen Centrum ausgehend, proportional der Entfernung von demselben wirkt. Aber Newton gelang es, noch einen Schritt weiter zu thun. Im zweiten Buche des oben erwähnten Werkes Prop. XXVI. ließ er das Mittel einen Widerstand leisten, proportional der Geschwindigkeit. Unmittelbar vorher hatte er dort folgenden Satz bewiesen: „Corpora funependula quibus, in medio quavis resistitur in ratione momentorum temporis, et corpora funependula quae in ejusdem

---

*) Ich muß mich hier auf die Angaben Montucla's hinsichtlich des Beweises beschränken. (Montucla, Histoire des Mathématiques. II. p. 719.) Das Werk von Huyghens soll zwar laut Katalog in der hiesigen Königlichen Bibliothek existiren. Es ist mir aber trotz vielfacher, zu verschiedenen Zeiten wiederholter Bemühungen nicht gelungen, zur Einsicht desselben zu kommen. Es war eben stets „verliehen" oder „verstellt".

gravitatis specificae medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore pergunt, et arcuum partes proportionales simul describunt." Auch der Beweis dieses Satzes gründet sich auf den Nachweis, daß die Kräfte den Bogen proportional sind. Mit diesem angeführten Satze ist dann aber das Problem unmittelbar gelöst.

Schon im Jahre 1726 glaubte dann Euler in den Acta Eruditorum eine Construction der tautochronen Curven geben zu können, für ein unendlich entferntes und gleichmäßig anziehendes Centrum, wenn sich die Bewegung in einem Medium vollzieht, das einen Widerstand gleich einer beliebigen Function der Geschwindigkeit bietet. Diese Construction war indeß, wie Jacob Herrmann in den Acta Eruditorum vom Jahre 1737 zeigte, unrichtig gewesen. Sie gab nämlich nur solche Curven, auf welchen der Fall in derselben Weise wie auf einer Cycloide im leeren Raum erfolgte, nicht aber solche, auf denen der Fall in gleichen Zeiten erfolgt, von wo auch die Bewegung begonnen haben möge. Euler nahm das Problem wenige Jahre später von Neuem auf, indem er die Frage von einer etwas anderen Seite angriff. Er behandelt das Problem in seiner ersten diesen Gegenstand behandelnden Arbeit: „De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo (Commentarii Acad. Petropol. 1734)" in Beziehung auf zwei Punkte. Erstens sucht er nämlich die Curve, in der ein schwerer Punkt beim Fallen im leeren Raum nach gleichen Zeiten im tiefsten Punkte derselben ankommen muß, wo er seinen Fall auch begonnen haben mag. Hier giebt es nur eine Curve zur Lösung, die Cycloide. Nicht so, wenn die Aufgabe folgendermaßen gestellt wird. Es werden diejenigen Curven gesucht, in denen die ganzen Oscillationen, aus Ab- und Ansteigen bestehend, isochron sind. Die Art, in der Euler dieser Aufgabe Herr zu werden sucht, ist die, daß er zu einer gegebenen Curve eine andere mit ihr zu verbindende sucht, die so beschaffen ist, daß die Oscillationen in gleichen Zeiten stattfinden. Da kein Widerstand angenommen wird, so wird die Höhe, bis zu welcher der Punkt ansteigt, dieselbe sein, die er vom höchsten Punkte herabgestiegen ist. Die Geschwindigkeit des Punktes ist daher an jedem Punkte der Curve gleich derjenigen, die er durch Fallen aus der entsprechenden Vertikalhöhe erhalten hätte. Die Zeit, die der Punkt braucht, um zwei gleich hohe Bogenelemente der Curven ds und dt zu durchlaufen, wird daher gleich $\frac{ds + dt}{\sqrt{b-x}}$ sein, wo b die Gesammthöhe, x die vom tiefsten Punkte gerechnete Vertikale bezeichnet. Dieser Ausdruck muß so integrirt werden, daß das Integral für $x = 0$ verschwindet, für $x = b$ dagegen b aus dem Ausdrucke herausgeht. Setzt man $ds + dt = dv$, $dv = \frac{pdx}{e}$, so ergiebt sich $p = x^{-\frac{1}{2}}$, d. h. $s + t = 2\sqrt{ax}$. Da hierin a beliebig angenommen werden kann, so genügen dieser Bedingung unendlich viele Curven. Sollen beide Bogen gleich sein, so ergiebt sich die Cycloide als die geforderte Curve.

In seiner zweiten Arbeit: Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum (ebenfalls Comm. Acad. Petropol. 1734) geht Euler einen Schritt weiter, indem er den Fall behandelt, wo sich die Bewegung in einem Mittel vollzieht, dessen Widerstand gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit ist. Er nimmt dabei an, daß der Körper die Form eines Cylinders oder einer Kugel habe, deren specifisches Gewicht sich zu dem des umgebenden Mittels verhält wie m zu n. Da auch hier die Zeit unabhängig sein muß von der Höhe, in welcher das Absteigen resp. Ansteigen begonnen resp. aufgehört hat, so muß der Ausdruck des Zeitelementes, in dem ein Bogenelement durchlaufen wird, eine Function von der Dimension 0 sein in Beziehung auf die von dem Bogenelement abhängige Größe. Es ist dies dasselbe Princip, auf dem auch, wie wir bald sehen werden, Jean Bernoulli die

Lösung dieser Aufgabe gegründet hat. Euler untersucht die Fälle des Ansteigens und Absteigens getrennt. Sind beide Curven jede für sich tautochron, so wird ja auch durch ihre Zusammenfügung eine Curve entstehen, in welcher die Oscillationen tautochron sind. Als Endgleichungen der gesuchten Curven findet er für den Fall einer Kugel mit dem Durchmesser a

$$8m^2 a\,sds + 3(m-n)\,nfxds = 8(m-n)\,mafdx$$

für das Absteigen, resp.

$$8m^2 a\,sds - 3(m-n)\,mbxds = 8(m-n)\,mabdx$$

für das Ansteigen. Wird f = b, so werden die beiden Zweige zu einer continuirlichen Curve. In andern Fällen sind die Bogen des Ab- und Ansteigens verschieden und der Körper steigt nicht bis zu der Höhe, von der er herabgestiegen war. Auch der Punkt der größten Geschwindigkeit fällt dann nicht mit dem tiefsten Punkte zusammen. Indem wir die weiteren Resultate dieser Arbeit, die sich auf die Unterschiede in der Form der absteigenden und ansteigenden Curve, auf den Ort der größten Geschwindigkeit und deren Bestimmung beziehen, übergehen, wenden wir uns zu der Arbeit Jean Bernoulli's, die, ziemlich gleichzeitig publicirt, in ähnlicher Weise zu denselben Resultaten gelangte. Die Arbeit ist erschienen in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1730 (Méthode pour trouver les tautochrones dans des milieux résistans comme le quarré des vitesses). Nach Voranschickung der Definition ähnlicher Functionen, Bestimmung der Dimensionen derselben und dem Nachweise, daß ähnliche Functionen von der Dimension 0 einander gleich sind, stellt er sich folgendes Problem: „Décrire la courbe par laquelle un corps descendant par sa pesanteur dans un milieu d'une densité uniforme de quelque point de la courbe qu'il commence à descendre, parvienne toujours dans un temps égal au point le plus bas; et qu'il remonte dans le même temps par l'autre branche de la courbe jusqu'où il pourra remonter, en supposant la résistance comme le quarré des vitesses." Die Geschwindigkeit in einem Punkte des Bogens wird bestimmt durch die Gleichung

$$v^2 = 2g\,Ae^{\pm\frac{2r}{n}} - 2ge^{\pm\frac{2r}{n}}\int e^{\mp\frac{2r}{n}}\,dx.$$

Es bezeichnet dabei g die Schwerkraft, e die Basis der natürlichen Logarithmen, r den Bogen, x die vertikale Abscisse. Der Widerstand des Mittels ist gleich $\frac{v^2}{n}$ angenommen. A endlich ist der Werth, den $\int e^{\mp\frac{2r}{n}}\,dx$ annimmt, wenn x die dem ganzen Bogen entsprechende Abscisse wird. Die Zeichen $\pm$ beziehen sich auf das Absteigen oder Ansteigen. Daraus ergiebt sich dann für das Zeitelement

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2g\,Ae^{\pm\frac{2r}{n}} - 2ge^{\pm\frac{2r}{n}}\int e^{\mp\frac{2r}{n}}\,dx}}.$$

Damit nun die Zeit, die der Körper zum Ansteigen oder Absteigen braucht, immer dieselbe sei, muß das Integral von dem durchlaufenen Bogen unabhängig sein. Es muß daher gleich einer ähnlichen Function der Dimension 0 wie $\int\frac{mdP}{\sqrt{A^2-P^2}}$ (m eine willkürliche Constante) sein, deren Werth von A unabhängig ist. Es ergiebt sich daraus nach leichter Umformung

$$\int\frac{e^{\mp\frac{r}{n}}\,dr}{\sqrt{A^2-\int e^{\mp\frac{2r}{n}}\,dx}} = \int\frac{mdP}{\sqrt{A^2-P^2}}.$$

Daraus folgen als nothwendige Gleichungen:

$$e^{\mp\frac{r}{n}}\,dr = m\,dP, \quad \int e^{\mp\frac{r}{n}}\,dx = P^2.$$

Folglich

$$P^2 = \frac{1}{m^2}\left(\mp n\,e^{\mp\frac{r}{n}} \pm n\right)^2,$$

woraus mit Hülfe der anderen Gleichung folgt:

$$m^2\,dx = \mp 2\,ndr \pm 2\,n\,e^{\pm\frac{r}{n}}\,dr.$$

Da r zugleich mit x verschwinden muß, so ergiebt sich dann unmittelbar als Gleichung der Tautochrone

$$m^2\,x = -2\,n^2 \mp 2\,nr + 2\,n^2\,e^{\pm\frac{r}{n}}.$$

Die Differentialgleichung derselben kann auch auf eine Form gebracht werden, die frei von Exponentialgrößen ist, nämlich

$$\pm m^2\,x\,dr + 2\,nr\,dr = m^2\,ndx,$$

eine Gleichung, die für $n = \infty$, d. h. für den Fall, wo der Widerstand des Mittels Null ist, in die Gleichung der Cycloide

$$r^2 = m^2\,x$$

übergeht. Nachdem so die Hauptaufgabe, die Bernoulli sich gestellt, gelöst, bestimmt er die Länge eines Bogens, den der Körper, nachdem er einen gegebenen Bogen abgestiegen ist, wieder ansteigt, aus der Länge desselben. Bezeichnet man diese mit a, so ist, da v^2 beim Beginn des Absteigens Null ist,

$$A = \frac{n^2}{m^2}\cdot\left(1 - e^{-\frac{a}{n}}\right)^2.$$

Für die Endgeschwindigkeit in diesem Bogen findet sich daraus

$$v^2 = \frac{2n^2g}{m^2}\left(1 - e^{-\frac{a}{n}}\right)^2.$$

Aehnlich, nur mit anderen Zeichen, findet man für die Anfangsgeschwindigkeit im ansteigenden Bogen von der Länge b

$$v^2 = \frac{2n^2g}{m^2}\left(e^{\frac{b}{n}} - 1\right)^2.$$

Da die Endgeschwindigkeit des abgestiegenen und die Anfangsgeschwindigkeit des ansteigenden Bogens gleich sind, so folgt

$$1 - e^{-\frac{a}{n}} = e^{\frac{b}{n}} - 1,$$

woraus

$$b = n\,l\left(2e^{\frac{a}{n}} - 1\right) - a.$$

Die beiden Zweige der Tautochrone sind also im Allgemeinen nicht gleich. Für den Fall des leeren Raumes ($n = \infty$) wird jedoch $a = b$, wie Bernoulli mittels einer leichten Transformation zeigt, da es direct aus der Form des für b gefundenen Werthes nicht hervorgeht. Den Werth der größten Geschwindigkeit bestimmt Bernoulli, indem er das Differential gleich 0 setzt. Er erhält daraus die Bestimmungsgleichung

$$e^{\frac{r}{n}}\left(1 - e^{-\frac{a}{n}}\right)^2 + 1 - e^{\frac{r}{n}} = 0,$$

woraus

$$r = 2a - n\,l\left(2e^{\frac{a}{n}} - 1\right).$$

Dieser Punkt fällt also im Allgemeinen nicht mit dem tiefsten Punkte zusammen. Bernoulli gelangt also zu denselben Resultaten, zu denen gleichzeitig mit ihm Euler gekommen war. Beide hatten das Widerstandsgesetz verallgemeinert, da sie denselben nicht mehr einfach proportional der Geschwindigkeit, sondern proportional dem Quadrate derselben angenommen hatten.

Wenige Jahre später suchte dann Fontaine das Problem noch allgemeiner anzugreifen. Seine erste Arbeit über diesen Gegenstand findet sich in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1734 (Sur les courbes tautochrones). Er wendet zur Lösung des Problems die sogenannte Fluxiodifferentialrechnung an, d. h. er läßt dieselben Linien auf verschiedene Weisen variiren und benutzt zur Unterscheidung dieser verschiedenen Variationen einerseits die englische Bezeichnung der Fluxionsrechnung, andererseits die Leibniz'sche Bezeichnung der Differentialrechnung. Es ist dies dieselbe Methode, die frühere Gelehrte bei dem Probleme der Tractorien benutzt hatten. Fontaine behandelt das Problem unter Voraussetzung einer beliebigen Kraft und eines Mittels ohne Widerstand. Das ist ein Fall, bei dem es möglich ist, den Ausdruck für die Geschwindigkeit zu bestimmen und den daraus entnommenen Werth des Zeitelementes zu integriren. Dann geht er dazu über, eine Methode zu geben, vermittelst deren man auch ohne Kenntniß der Geschwindigkeit die Curve allgemein bestimmen kann. Er behandelt dabei die Fälle, wo der Widerstand proportional der Geschwindigkeit, wo der Widerstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit $\frac{v^2}{n}$ und endlich, wo er proportional einem Ausdruck von der Form $\frac{v^2 + mv}{n}$ ist. Wir begnügen uns hier mit diesen Andeutungen, da Fontaine in seiner zweiten Arbeit im Wesentlichen noch einmal darauf zurückkommt, diese Arbeit sich aber besser im Zusammenhang mit denen von Lagrange übersehen läßt.

Später als Fontaine's und unabhängig von dessen Untersuchungen steht die Arbeit Necker's da, die sich in den Memoiren der Pariser Akademie vom Jahre 1743 findet (Solution de quelques problèmes de mécanique). Necker geht auch insofern unabhängig von den Bestrebungen der früheren Bearbeiter vor, als er das Problem für den leeren Raum zu lösen sucht, dagegen aber die Verallgemeinerung einführt, daß beim Gleiten auf der Curve eine Reibung stattfindet. Er spricht das Problem nämlich folgendermaßen aus: „Trouver la courbe sur laquelle un corps glissant par sa pesanteur dans le vide, de quelque point de la courbe qu'il commence à descendre, parvienne toujours dans un temps égal au point le plus bas, en supposant la résistance provenant du frottement comme une partie déterminée de la pression qu'exerce le corps sur la courbe.“ Bezeichnet man mit v die Geschwindigkeit, mit x die vertikale Abscisse, mit r den Bogen, beide vom tiefsten Punkte an gerechnet, mit R endlich den Krümmungsradius der Curve und mit g die Schwerkraft, so ist der in Folge der Schwere auf die Curve ausgeübte Druck gleich $g \cdot \frac{\sqrt{dr^2 - dx^2}}{dr}$, der in Folge der Centrifugalkraft ausgeübte Druck gleich $\frac{v^2}{R}$. Verhält sich nun die Reibung zum Drucke wie m zu n, so ist der Ausdruck der in irgend einem Punkte wirkenden Kraft

$$g \cdot \frac{dr}{dx} - \frac{mg\sqrt{dr^2 - dx^2}}{ndr} - \frac{mv^2}{nR}.$$

Multiplirt man die daraus resultirende Differentialgleichung mit $2e^{-\frac{2m}{n}\int R^{-1}dr}$ und integrirt, so ergiebt sich daraus

$$v^2 = \frac{C - 2g\int e^{-\frac{2m}{n}\int R^{-1}dr}\left(dx - \frac{m}{n}\sqrt{dr^2 - dx^2}\right)}{e^{-\frac{2m}{n}\int R^{-1}dr}},$$

so daß man erhält

$$dt = \frac{-e^{-\frac{m}{n}\int R^{-1}dr}}{\sqrt{C - 2g\int e^{-\frac{2m}{n}\int R^{-1}dr}\left(dx - \frac{m}{n}\sqrt{dr^2 - dx^2}\right)}}.$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, wendet Recker dieselbe Methode an, die Bernoulli und Euler benutzt hatten. Er setzt den Ausdruck gleich einer ähnlichen Function von der Dimension 0, d. h. gleich $\frac{-dP}{\sqrt{A^2-P^2}}$. Dadurch ergiebt sich dann:

$$g \cdot e^{-\frac{m}{n}\int R^{-1} dr}\left(dx - \frac{m}{n}\sqrt{dr^2-dx^2}\right) = dr\int e^{-\frac{m}{n}\int R^{-1} dr} dr.$$

Indem er nun dx durch qdr ersetzt, ergiebt sich ohne Schwierigkeiten

$$\frac{m^2+n^2}{n^2} gdq = dr,$$

woraus sich dann

$$\frac{m^2+n^2}{n^2} gx = \frac{1}{2} r^2 + Br + D$$

als Gleichung der Curve ergiebt, wo B und D noch zu bestimmende Constanten sind. Was nun diese betrifft, so muß D gleich 0 sein, da x und r gleichzeitig 0 werden müssen. Die andere Constante B bestimmt sich aus der Bedingung $P=0$ für $r=0$, woraus folgt $B=\frac{mg\sqrt{m^2+n^2}}{n^2}$. Er findet also als schließliche Curvengleichung

$$4ax = r^2 + \frac{4amr}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Die Curve ist daher für seine Voraussetzung ein Theil einer umgekehrten Cycloide, deren Gleichung bei unendlich kleiner Reibung in die Form $4ax=r^2$ übergeht. Dieselbe Methode läßt sich durch einfache Zeichenänderung auch auf den Fall des Ansteigens anwenden. Die Resultate sind den obigen analog. Es war damit also von Recker nachgewiesen, daß die Cycloide auch noch bei einem Widerstande, der proportional dem Drucke des Körpers auf die Curve ist, tautochron ist. In dieser Arbeit behandelt Recker ferner den Fall, wo außerdem auch noch das Mittel, in dem die Bewegune stattfindet, einen Widerstand wie das Quadrat der Geschwindigkeit ausübt. Bezeichnet f die Intensität des Widerstandes, so folgt

$$dt = \frac{-e^{\mp\int\left(\frac{mdr}{nR}+fdr\right)} dr}{\sqrt{C-2g\int e^{\mp 2\int\left(\frac{mdr}{nR}+fdr\right)} \cdot \left(dx \mp \frac{m}{n}\sqrt{dr^2-dx^2}\right)}},$$

wo sich die zweierlei Zeichen auf die verschiedenen Fälle des An- und Absteigens beziehen. Die Methode ist dieselbe wie vorher. Er vergleicht den Ausdruck mit der ähnlichen Function $\frac{-dP}{\sqrt{A^2-P^2}}$, ersetzt dx durch qdr, so daß sich als Endgleichung, die zu integriren, findet:

$$dr = \frac{(m^2+n^2)\, gdq}{m^2 \pm fgn^2 q - fgmn\sqrt{1-q^2}}.$$

Am Schlusse seiner Arbeit endlich dehnt Recker seine Untersuchung noch auf die Aufgabe aus, die Tautochrone zu finden unter derselben Reibungshypothese, jedoch unter der Voraussetzung, daß der Widerstand eine beliebige Function der Geschwindigkeit sei, freilich mit der Beschränkung, daß dieser Widerstand unendlich klein bleibe. Durch Vergleichung mit der für den leeren Raum gefundenen Curve, von der sich die gesuchte nur um unendlich wenig unterscheiden kann, bestimmt er auch hier den Ausdruck für dt, den er wiederum mit der ähnlichen Function $\frac{-dP}{\sqrt{A^2-P^2}}$ vergleicht. Er findet auf diese Weise eine Gleichung der gesuchten Curve, die sich nur um ein Glied von der für den leeren

Raum gefundenen unterscheidet, nämlich um $\int dr \left(f\varphi\varrho - \frac{m}{n}\int \frac{f\varphi\varrho dq}{\sqrt{1-q^2}}\right)$, wo $f\varphi$ die Intensität des Widerstandes, ϱ eine Function von r ist.

Lagrange versuchte dann das Problem ganz allgemein zu lösen. Er unterscheidet sich auch sonst in der Fragestellung wesentlich von seinen Vorgängern. In seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand in den Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1765 (Sur les courbes tautochrones) spricht er dasselbe folgendermaßen aus: „**Quelle est, en général, la force nécessaire pour produire le tautochronisme en la regardant comme une fonction quelconque de l'espace et de la vitesse?**" Die Lösung, die er in dieser Arbeit davon giebt, ist folgende: Bezeichnet man mit u die Geschwindigkeit des Körpers in irgend einem Punkte seiner Bahn, mit p die beschleunigende Kraft, mit x und a den noch zu durchlaufenden, resp. den ganzen Bogen, so ist die Zeit, die der Körper braucht, um x zu durchlaufen, $\int \frac{dx}{u}$. Diese Zeit muß von a unabhängig sein. Es muß, wenn man nach der Integration $x = a$ setzt, a aus dem Ausdrucke verschwinden. Versteht man also unter X und A zwei ähnliche Functionen von x und a, so muß nach Substitution von $X = zA$, $\int \frac{dx}{u}$ eine Function sein, die nur von z abhängig ist. Differentiirt man daher, indem man x und a als variabel betrachtet, so muß, wenn man $dx = X'dX$, $da = A'dA$ (X' und A' Functionen von X, x, A, a) und dX durch seinen Werth $Adz + zdA$ ersetzt, der Coefficient von dA gleich 0 sein. Da nun u eine Function von x und a, also $du = Pdx + Qda$, wo in Folge von $udu + pdx = 0$, $P = -\frac{p}{u}$, so wird das Differential von $\int \frac{dx}{u}$ ergeben:

$$\frac{AX'}{u}dz + \left(\frac{X'z}{u} - A'\int \frac{Qdx}{u^2}\right)dA, \text{ also } \frac{X'z}{u} - A'\int \frac{Q}{u^2}dx = 0.$$

Hieraus wird Q bestimmt, so daß man als vollständigen Ausdruck für du erhält:

$$du = -\frac{pdx}{u} + \left(\frac{ud\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}\right)\frac{d\alpha}{a},$$

wo $\xi = XX'$, $\alpha = AA'$, also ξ eine Function von x, α von a ist. Bezeichnet nun R den aus x und u zusammengesetzten Factor, der die Gleichung $du + \frac{pdx}{u} = 0$ integrabel macht, so muß derselbe, als Function von x und a betrachtet, auch $du + \frac{pdx}{u} - \left(\frac{ud\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}\right)\frac{d\alpha}{a} = 0$ integrabel machen. Das erfordert einerseits, daß $R \cdot \left(\frac{ud\xi}{dx} + \frac{p\xi}{u}\right)$ constant, andererseits daß $\frac{udu + pdx}{\frac{u^2d\xi}{dx} + p\xi}$ ein vollständiges Differential sei. Dies ist aber nur möglich, wenn $\frac{u^2}{\frac{u^2d\xi}{dx} + p\xi}$ eine Function von $\frac{u}{\xi}$ allein ist. Bezeichnet man daher mit φ eine Function dieser Größe, so ergiebt sich für die beschleunigende Kraft p, die nothwendig ist, um Tautochronismus hervorzubringen, folgender allgemeine Ausdruck:

$$p = u^2\left[\frac{\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right)}{\xi} - \frac{d\xi}{\xi dx}\right].$$

Setzt man z. B. $\varphi\left(\frac{u}{\xi}\right) = f + g\frac{\xi}{u} + h\frac{\xi^2}{u^2}$ (f, g, h constant), so ergiebt sich, daß die nöthige

Kraft für ein Mittel, dessen Widerstand allgemein $-gu-ku^2$ ist, proportional sein muß $\frac{1-e^{-kx}}{k}$, wo x der noch zu durchlaufende Raum ist. Lagrange schließt dieser Lösung des Problems noch den Satz an, daß eine Curve, welche unter irgend einer Hypothese über Kraft und Widerstand tautochron ist, dies auch noch bleibt, wenn der Widerstand um eine Größe vermehrt wird, die der Geschwindigkeit proportional ist. An diese Arbeit schließt sich unmittelbar eine Arbeit von d'Alembert an, der in etwas anderer Weise, wie Lagrange, zu ähnlichen Resultaten gelangt. Die Arbeit ist äußerst formelreich und enthält eine Menge sich an unser Problem anschließender Bemerkungen. Da aber die Frage selbst durch sie nicht wesentlich gefördert ist, begnügen wir uns mit Anführung derselben. Sie ist abgedruckt in den Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1765 (Sur les courbes tautochrones).

Gegen diese Arbeit von Lagrange trat Fontaine in einem Aufsatze auf (Addition au Mémoire imprimé en 1734 sur les courbes tautochrones. Mém. de Paris 1768). Er suchte zu zeigen, daß Lagrange's Lösung im Wesentlichen dieselbe sei, wie die, die er früher gegeben, nur weniger allgemein, da sie auf der Voraussetzung beruhe, daß s sich immer als Function von x bestimmen lasse, so daß $\frac{x'}{u}$ eine Function der Dimension 0 von X und A werde, während dies nicht nothwendig sei. Ferner machte Fontaine der Lösung zum Vorwurf, daß sie nur die bereits bekannten Fälle enthalte. Er entwickelt dann im weiteren Verlauf seiner Arbeit eine andere, von seiner ersten verschiedene Methode zur Lösung des Problems. Er betrachtet zwei Körper, die auf derselben Curve zwei Bogen durchlaufen haben, die sich nur unendlich wenig von einander unterscheiden. Aus der Vergleichung der Zeiten, die diese beiden Körper gebrauchen, leitet er zwei Gleichungen ab, die das Problem allgemein lösen sollen, nämlich:

$$\alpha\frac{dp}{dx}-p\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\alpha}{dx}\frac{dp}{du}u-\frac{S}{T}\frac{dp}{du}u+\frac{d^2\alpha}{dx^2}u^2+\frac{2S}{T}p=0$$

$$\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d^2p}{du^2}u+\frac{S}{T}\frac{dp}{du}-\frac{S}{T}\frac{d^2p}{du^2}u+2\frac{d^2\alpha}{dx^2}u=0,$$

eine Lösung, die er auf den von Lagrange speciell behandelten Fall anwendet. In Folge dieses Angriffs sah sich Lagrange veranlaßt, den Gegenstand in einer neuen Arbeit (Nouvelles réflexions sur les courbes tautochrones) in den Berliner Memoiren vom Jahre 1770 zu behandeln. Er wollte darin namentlich eine Methode geben, die zur Lösung des Problems auch dann noch führt, wenn die Differentialgleichung der Geschwindigkeit nicht mehr integrabel ist. Er behandelt zunächst ein anderes Problem, nach dessen Lösung man dann leicht zu dem eigentlichen Ziele gelangen kann. Dies Problem lautet: „Soit *a* l'espace totale, que peut parcourir un corps qui part d'un point donné avec une certaine vitesse, et qui est continuellement retardé dans sa marche par une force variable *p*; soient de plus, *x* un espace quelconque parcouru pendant le temps *t*, *u* la vitesse du corps au bout de ce temps, et *L* une fonction quelconque donnée de *x* et *a*: on demande par quelle fonction de *u* et de *x* doit être exprimée la force *p*, pour que le temps soit égal à une fonction quelconque de *L*." Ausgehend von der Gleichung $udu+pdx=0$ gelangt Lagrange zu zwei Gleichungen zwischen den Größen x, u und a:

$$\frac{u}{r}du+\frac{p}{r}dx+da=0\ldots\ldots(E)$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{r}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{p}{r}\right)}{du}=0\ldots\ldots(F),$$

(dabei bedeutet $r = pX + u^2 \frac{dX}{dx}$, und $X = \frac{N}{M}$ bestimmt sich aus der Gleichung $dL = Mdx + Nda$), die gleichzeitig stattfinden müssen, aber so, daß durch sie keine neue Relation zwischen diesen drei Größen hinzugefügt wird. Diese Bedingung kann aber nur erfüllt werden, wenn entweder die zweite Gleichung identisch ist oder wenn sie in der ersten enthalten ist. Im ersten Falle muß $\frac{u}{r} du + \frac{p}{r} dx$ (a constant) ein vollständiges Differential von u und x sein. Es muß dann $\frac{u^2}{r}\left(\frac{du}{u} - \frac{dx}{X}\right)$ integrabel sein. Dazu ist nöthig, daß $\frac{u^2}{r}$ eine Function von $\frac{u}{X}$ allein sei. Bezeichnet man dieselbe mit φ, so ergiebt sich daraus

$$p = u^2 \left(\frac{\varphi\left(\frac{u}{X}\right)}{X} - \frac{dX}{Xdx} \right),$$

eine Function, aus der a herausgehen muß. Im andern Falle müssen die beiden Gleichungen mit einander identisch sein. Da die erste der beiden Gleichungen die ersten Differentiale dx, du, da enthält, so muß dann die eine das Integral der andern sein. Es reducirt sich daher die zweite auf:

$$\frac{dr}{dx} - \frac{pdr}{udu} + \frac{rdp}{udu} = 0.$$

Daraus folgen die beiden Gleichungen:

$$\frac{dq}{dx} - p\frac{dq}{udu} = 0, \quad \frac{dq}{da} - \frac{rdq}{udu} = 0,$$

die gleichzeitig mit der zweiten stattfinden müssen. Ist dann H die bekannte Function von x und a, so kann man a eliminiren und erhält zwei Gleichungen mit u, p, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{du}$, u. s. f. Aus diesen Gleichungen lassen sich dann p und seine Differentiale eliminiren, so daß eine Gleichung zwischen x und u resultirt, von deren Identität oder Nichtidentität die Lösbarkeit des Problemes abhängt. Um von diesem Probleme zu unserm Probleme der Tautochronen zu gelangen, ist nun nur p als eine solche Function von u und x zu bestimmen, daß der Ausdruck für t von a unabhängig ist, d. h. L eine solche Function von x und a ist, daß a für $x = a$ herausgeht. Dies ergiebt $\frac{N}{M} = X = -1$ für $x = a$. Aus dieser Bestimmung und der, daß für $x = 0$ auch $t = 0$ sein muß, folgt

$$dL = mCx^{m-1}dx + x^m \frac{dC}{da} da,$$

wo C eine Function von a, m eine positive Zahl ist. Daraus folgt $X = \frac{xdC}{mCda}$, so daß X von der Form $x \cdot D$ sein muß. Es ergiebt sich daraus, daß nicht nur $X = 0$ für $x = 0$ sein muß, sondern auch $\frac{dX}{dx}$ eine endliche Größe, eine Bemerkung, die d'Alembert Lagrange schon in einem Briefe vom 16. Juni 1769 mitgetheilt hatte (siehe Mém. de l'Acad. de Berlin 1763 p. 260—266). Da unter diesen Bedingungen L als sonst ganz unbestimmt betrachtet werden kann, so liegt die Lösung unseres Problemes in dem obigen eingeschlossen. Für den Fall, daß die Bedingungsgleichung identisch ist, giebt Lagrange eine Lösung, welche mit der in seiner ersten Arbeit vom Jahre 1767 übereinstimmt. Im zweiten der dabei hervortretenden Fälle zieht er einen anderen einfacheren und bequemeren Weg vor, da der in der Lösung des obigen Problemes angedeutete Weg zu große Schwierig-

keit darbietet. Da zur Identität der beiden Gleichungen q in der zweiten dieselbe Relation zwischen u, x und a ausdrücken muß, die in der ersten liegt, so kann man den aus (E) gezogenen Werth von a (in x und u) in q einsetzen. Man erhält dadurch eine neue identische Gleichung. Betrachtet man nun X als eine Function von x und a, so ergiebt sich durch Zerlegung von dX in $Pdx + Qda$, $dP = Rdx + Sda$ eine Gleichung, die zur Lösung des Problemes genügt. Der Rest von Lagrange's Arbeit ist der Widerlegung von Fontaine's Angriffen gewidmet. Er weist darin nach, daß die erste der von Fontaine aufgestellten Gleichungen seine Bedingungsgleichung sei, und zeigt, daß Fontaine's Lösung eine unnöthige Beschränkung enthalte, indem der Fall, daß die Bedingungsgleichung nicht identisch, durch sie nicht zu erledigen ist. Waren dergestalt auch die Angriffe Fontaine's zurückgewiesen, so ist die Berechtigung von Einwürfen gegen die Lagrange'sche Arbeit doch nicht ganz in Abrede zu stellen. Herr J. Bertrand ist neuerdings in einer Arbeit, die sich wesentlich mit einer Behandlung der Lagrange'schen Resultate beschäftigt, zu Schlüssen gelangt, die zeigen, daß die Bemühungen Lagrange's wenigstens nicht zu einer so allgemeinen Lösung geführt haben, wie er selbst es geglaubt. Die Arbeit (Note sur le problème des tautochrones) findet sich in Liouville's Journal, Série I. T. XII. 1847. Schon d'Alembert hatte in seinem oben bereits erwähnten Schreiben Lagrange darauf aufmerksam gemacht, daß der Satz: „Toute courbe qui est tautochrone dans une hypothése quelconque de force et de résistance, l'est encore si l'on suppose la résistance augmentée d'un terme proportional à la vitesse," ungenau sei, was auch Herr Bertrand in seinem Aufsatze zeigt. Zunächst wendet sich derselbe gegen die Aufstellung des Problemes, wie Lagrange sie gegeben. Dieselbe ist in wesentlichen Stücken unbestimmt. Die gesuchte Kraft würde eine willkürliche Function von zwei Variabeln sein. Betrachtet man aber eine willkürliche Function der Zeit t und einer Linie a und setzt voraus, daß diese Function φ (t, a) den Bedingungen

$$\varphi = 0 \text{ für } t = t_0, \frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ für } t = 0$$

genüge, so würden auch, wenn man die geradlinige Bewegung eines Punktes durch $x = \varphi$ (t, a) ausdrückt, die beweglichen Punkte, deren Bewegung für alle möglichen Werthe von a hierdurch dargestellt sind, in derselben Zeit zu dem Punkte $x = 0$ gelangen. Die Kraft p, welche für eine derartige Bewegung nöthig ist, läßt sich aber mit Hülfe der Lage und Geschwindigkeit ausdrücken. Ist v die Geschwindigkeit, so kann man durch Elimination von t und a aus der obigen Gleichung in Verbindung mit

$$v = \frac{d\varphi}{dt}, \; p = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

die allgemeine Lösung des Problemes herleiten. Aber selbst wenn diese Elimination möglich wäre, so wäre für die Bestimmung der Art, in der sich die Kraft mit der Lage ändern muß, nicht viel gewonnen. Einfacher ist die Methode, welche Herr Bertrand in seiner Arbeit giebt. Es sei $P = \Psi(x, v)$ eine beschleunigende Kraft, unter deren Einfluß ein Punkt sich auf einer gegebenen Geraden (ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnend) so bewegt, daß seine Entfernung von dem Ende durch eine Function der Zeit $x = \varphi$ (t) ausgedrückt wird. Soll hierbei x durch $m\varphi$ (t) (m constant) ausgedrückt werden, so würde sich statt der obigen Formel ergeben

$$mp = \Psi \text{ (mx, mv), aus der folgen würde } p = x\Psi\left(\frac{v}{x}\right).$$

Dies ist eine Formel, die eine specielle Lösung des Problemes der Tautochronen giebt, welche aber nur in einer kleinen Anzahl von Fällen Anwendung finden kann. Soll die Bewegung nämlich in einem

Mittel vor sich gehen, dessen Widerstand gleich einer Function der Geschwindigkeit ist, so muß ψ so bestimmt werden, daß $p = x\psi\left(\frac{v}{x}\right) = F(x - f(v))$, d. h. $\frac{d^2F}{dxdv} = 0$,

so daß

$$\psi\left(\frac{v}{x}\right) = Ax + B\,\frac{v}{x},\quad p = Av + Bx$$

ist, welche Lösung mit der von Newton gegebenen übereinstimmt. Will man aus obiger Gleichung das Resultat, welches Lagrange gegeben, herleiten, so setze man $x = \theta(u)$ und bestimme p so, daß die Entfernung zur Zeit t nicht x, sondern u sei. Tautochronismus findet auch dann noch unter der Voraussetzung $\theta(u) = 0$ für $u = 0$ statt. Für die zu dieser Bewegung nöthige Kraft findet man

$$F = \frac{\theta(u)\cdot\psi\left(\dfrac{\theta(u)}{v\,\dfrac{d\theta}{du}}\right)}{\dfrac{d\theta}{du}} - \frac{v_1^2\cdot\dfrac{d^2\theta}{du^2}}{\dfrac{d\theta}{du}}.$$

Diese Formel fällt mit der von Lagrange gegebenen zusammen. Setzt man nämlich

$$\frac{\dfrac{d\theta}{du}}{\theta} = \frac{1}{\xi},\ \text{so tritt F unter die Form}\ F = \xi\varphi\left(\frac{v_1}{\xi}\right) - \frac{v_1^2}{\xi}\cdot\frac{d\xi}{du} + \frac{v_1^2}{\xi},$$

eine Form, die sich ohne Schwierigkeit auf die reduciren läßt, die wir oben bei Lagrange gefunden. Es fragt sich nun, für welche Fälle des Widerstandes diese Formel Geltung hat. Da $\frac{d^2F}{dvd\xi} = 0$ sein muß, so kann man setzen

$$\frac{1}{\xi}\cdot\frac{d\xi}{du} = X(\xi),\quad \frac{v}{\xi}\cdot\varpi\left(\frac{v}{\xi}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{v}{\xi}\right),$$

so daß wir nun für $\frac{d^2F}{dvd\xi} = 0$ folgende Gleichung erhalten, wenn wir $\frac{v}{\xi}$ durch z ersetzen:

$$2\mathfrak{F}'(z) + z\cdot\mathfrak{F}''(z) = -2\xi^2\cdot X'(\xi).$$

Da aber z und ξ als unabhängige Variabele betrachtet werden können, so folgt, daß

$$2\mathfrak{F}'(z) + z\cdot\mathfrak{F}''(z) = m,\quad 2\xi^2 X'(\xi) = -m$$

(m constant) sein muß. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\mathfrak{F} = \frac{mz}{2} + b + \frac{c}{z},\ \text{aus der zweiten}\ X(\xi) = \frac{m}{2\xi} + c',$$

so daß man für F folgende Gleichung erhält

$$F = bv - c'v^2 + c\xi.$$

Es setzt sich also F zusammen aus einer Function der Geschwindigkeit $bv - c'v^2$ und einer Function der Lage $c\xi$. Dies ist also die Widerstandsfunction, für welche allein die Lösung Lagrange's gilt. Dies ist nur ein ganz specieller Fall des Problemes, keine allgemeine Lösung, wie Lagrange geglaubt, ein Fall, auf den die Fontaine'sche Methode bereits mit Erfolg angewendet worden war. Die allgemeinere Formel, aus der sich die Lagrange'sche als specieller Fall herleiten läßt, soll neuerdings von Herrn Brioschi entwickelt worden sein (siehe Tortolini, Annali di scienze matematiche e fisiche. T. II. und III. 1853. Sulle curve tautochrone). Dem Verfasser ist die Arbeit leider nicht zugänglich gewesen.

Der nächste große Mathematiker, der sich eingehender mit unserem Problem beschäftigt hat, ist Laplace. Nach Behandlung des Isochronismus der Pendeloscillationen in der Mécanique cé-

leste, T. I. Livre I. Chap. II. § 12, kommt er auch auf das Problem der Tautochronen, das ja auch für endliche Amplituden Isochronismus fordert. Bezeichnet s den vom tiefsten Punkt gerechneten durchlaufenen Bogen, z die verticale Abscisse, von demselben Punkte an gerechnet, g die Schwerkraft, dt das Zeitelement, so besteht die verzögernde Kraft beim Ansteigen erstens in der Componente der Schwerkraft nach dem Bogen, $g \cdot \frac{dz}{ds}$, zweitens in dem Widerstande des Mittels, der irgend eine Function φ der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ sei. Es ergiebt sich daraus die Gleichung

$$0 = \frac{dds}{dt^2} + g\frac{dz}{ds} + \varphi\left(\frac{ds}{dt}\right).$$

Unter der Annahme, daß

$$\varphi\left(\frac{ds}{dt}\right) = m\frac{ds}{dt} + n\frac{ds^2}{dt^2},$$

setzt Laplace $s = \psi(s')$. Durch diese Substitution in die obige Gleichung erhält dieselbe eine Form, in der ein mit $\frac{ds'^2}{dt^2}$ multiciplirtes Glied auftritt. Läßt man dies verschwinden, so ergiebt sich unter der Annahme, daß s′ mit s beginnt, $s' = c^{ns} - 1$, so daß die Differentialgleichung nun folgende Form annimmt:

$$0 = \frac{dds'}{dt^2} + m\frac{ds'}{dt} + n^2 g\frac{dz}{ds'}(1+s')^2.$$

Laplace entwickelt nun das letzte Glied in eine Reihe nach steigenden Potenzen von s′ und integrirt dann nach Multiplication mit $c^{\frac{mt}{2}}(\cos\gamma t + \sqrt{-1}\sin\gamma t)$. Aus dem Vergleich der reellen und imaginären Theile der so entstandenen Gleichung ergeben sich zwei Gleichungen, aus denen man $\frac{ds'}{dt}$ eliminiren kann. Für seinen Zweck genügt indeß die Gleichung

$$c^{\frac{mt}{2}}\frac{ds'}{dt}\sin\gamma t + c^{\frac{mt}{2}} s\left(\frac{m}{2}\sin\gamma t - \gamma\cos\gamma t\right) = -\ln\int s'^1 dt c^{\frac{mt}{2}}\sin\gamma t \ldots\ldots$$

Ist T der Werth von t für den Zeitpunkt, wo $\frac{ds}{dt} = 0$, so wird unter der Annahme, daß s′ unendlich klein, das zweite Glied unendlich klein im Verhältniß zum ersten. Daraus ergiebt sich:

$$0 = \frac{m}{2}\sin\gamma T - \gamma\cos\gamma T$$

oder

$$\operatorname{tang}\gamma T = \frac{2\gamma}{m}.$$

Da nun T von dem durchlaufenen Bogen unabhängig sein soll, so muß dieser Werth immer stattfinden, welchen Werth auch s′ haben möge. Es folgt also:

$$0 = \ln\int s'^1 dt c^{\frac{mt}{2}}\sin\gamma t + \ldots\ldots (t=0 \text{ bis } t=T).$$

Daraus läßt sich schließen, daß der Tautochronismus nur unter der Voraussetzung

$$n^2 g\frac{dz}{ds'}(1+s')^2 = ks'$$

stattfinden kann, woraus sich

$$gdz = \frac{kds}{n}(1 - c^{-ns})$$

als Gleichung der Tautochrone ergiebt, eine Gleichung, die sich für den Fall, daß der Widerstand einfach proportional der Geschwindigkeit ($n = o$) auf $gdz = ksds$, die Gleichung der Cycloide, reducirt. Laplace behandelt auch noch andeutungsweise den Fall, wo die verzögernde Kraft längs des Bogens allgemein R ist. Er hat dann die Gleichung

$$0 = \frac{dds}{dt^2} + R.$$

Setzt man hierin $\frac{ds}{dt} = S \cdot T$ (S Function von s, T von t allein), so wird t und $\frac{dT}{dt}$ eine Function von $\frac{ds}{Sdt}$, so daß sich als Ausdruck des Widerstandes findet

$$\frac{dds}{dt^2} = \frac{ds^2}{S^2 dt^2}\left[\frac{dS}{ds} + \psi\left(\frac{ds}{Sdt}\right)\right] = -R,$$

wo die erwähnte Function mit $\frac{ds^2}{S^2dt^2}\psi\left(\frac{ds}{Sdt}\right)$ bezeichnet ist.

Poisson hat in seiner Mécanique T. I. p. 368 das Problem auf folgende Weise behandelt. Bezeichnet s den Bogen der Cycloide, auf dem der Punkt herabfallen soll, so hat man bei einer constant wirkenden Schwerkraft $\sqrt{\frac{2g}{a}}\,dt = -\frac{ds}{\sqrt{hx - x^2}}$, wo a der Durchmesser des erzeugenden Kreises ist. Es ergiebt sich daraus durch Integration $t\sqrt{\frac{2g}{a}} = \text{Arc cos}\frac{2x - h}{h}$. Dies ergiebt für die Zeit, die der Körper braucht, um den tiefsten Punkt zu erreichen, der $x=0$ entspricht, $T = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$, womit die Unabhängigkeit der Dauer der Oscillation von der Höhe nachgewiesen ist. Daß dies auch noch der Fall ist, wenn die Bewegung in einem Mittel stattfindet, dessen Widerstand proportional der Geschwindigkeit ist, beweist Poisson folgendermaßen: Wird dieser Widerstand repräsentirt durch $\frac{gv}{k}$, so ergiebt sich als Differentialgleichung:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{k}\frac{ds}{dt} + \frac{g}{2a}s = 0.$$

Bezeichnet man nun $\sqrt{1 - \frac{ga}{2k^2}}$ mit γ, so erhält man als Integral

$$s = \alpha\left(\cos t\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}} + \frac{\sqrt{2ga}}{2\gamma k}\sin t\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}}\right)e^{-\frac{gt}{2k}}$$

und für T

$$\cos T\gamma\sqrt{\frac{g}{2a}} + \frac{\sqrt{2ga}}{2\gamma k}\sin\gamma T\sqrt{\frac{g}{2a}} = 0.$$

Im Folgenden beweist er dann noch, daß im leeren Raum die Cycloide die einzige Tautochrone sei.

Die Arbeit von Puiseux (Sur les courbes tautochrones. Liouville Journal. Série I. T. IX. 1844) schließt sich an die soeben besprochene Bearbeitung von Poisson an. Puiseux gelangt zu seinen Resultaten durch Differentiation unter dem Integralzeichen. Indem er die Aufgabe zunächst in ihrer einfachsten Form, im leeren Raume bei constanter Schwerkraft, behandelt, bestimmt er die Zeitdauer der Bewegung $T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \frac{\varphi'(hz)dz\sqrt{h}}{\sqrt{1-z}}$, wo $s = \varphi(x)$, $x = hz$. Da dieser Ausdruck von h, der Entfernung des Ausgangspunktes der Bewegung vom Coordinaten-

Anfangspunkte, unabhängig sein muß, so muß sein Differential noch h 0 sein. Er gelangt dadurch zu der Differentialgleichung $2x\varphi''(x) + \varphi'(x) = 0$,
woraus sich ohne Schwierigkeit $\varphi(x)$ oder s ableiten läßt. Es läßt sich dies leicht auf den Fall erweitern, wo die Kraft von einem festen Centrum ausgeht, das in der Entfernung r mit einer Kraft f (r) wirkt. Es ergiebt sich

$$T = \int_0^h \frac{\varphi'(x)\,dx}{\sqrt{h-x}},$$

woraus wieder zur Bestimmung von φ gewonnen wird

$$\varphi'(x) = \sqrt{\frac{c}{x}}, \text{ wo } x = \int_\alpha^r f(r)dr$$

ist. Hieraus läßt sich der Satz ableiten, den schon Newton gegeben hatte, daß die Componente der Kraft nach dem Radiusvector dem noch zu durchlaufenden Bogen proportional sein müsse. Man hat nämlich:

$$s = \frac{2T}{\pi}\sqrt{2\int_\alpha^r f(r)dr}, \qquad ds = \frac{2T f(r)dr}{\pi\sqrt{2\int_\alpha^r f(r)dr}}.$$

Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen ergiebt sich dann unmittelbar der Satz:

$$f(r)\frac{dr}{ds} = \frac{\pi^2 s}{4T^2}.$$

Auch daß die Curve normal zu dem Radiusvector sein muß, der vom festen Centrum aus nach dem Anfangspunkte der in gleichen Zeiten durchlaufenen Bogen geht, ergiebt sich allgemein. Ausgenommen ist nur der Fall, daß f für $r = \alpha$ zu 0 wird. Setzt man f (r) speciell gleich mr^p voraus, so ergiebt sich für ein anziehendes Centrum, daß die Curve mit ihrem Scheitel ihre Concavität oder Convexität dem festen Centrum zuwenden kann; der Radiusvector kann in's Unendliche wachsen; man erhält eine Spirale, die aus zwei unendlichen Zweigen besteht. Der Fall, wo $p = 1$, wird dann des Näheren untersucht. Der Charakter der Curve ist abhängig von der Größe $\frac{4T^2m}{\pi^2}$. Ist dieselbe kleiner als 1, so ergiebt sich eine Epicycloide; für den Werth 1 eine Gerade, deren Entfernung vom Centrum gleich α ist. Ist die Größe endlich größer als 1, so ergiebt sich eine Spirale. Ist f (r) $= m \cdot (r - \alpha)$, so folgt eine logarithmische Spirale. Die Verallgemeinerung der Aufgabe dahin, daß die Bewegung in einem Mittel erfolge, dessen Widerstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit, erledigt sich auf ähnliche Weise. Ist k der Widerstand für eine Geschwindigkeit gleich 1, so folgt nach dem Princip der lebendigen Kräfte bei Annahme von constanter Schwerkraft

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dx}{ds} + k\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Setzt man $\int_0^h e^{-2ks}dx = 1, \quad \int_0^x e^{-2ks}dx = u, \quad e^{-ks} = \psi(u)$,

so wird $$T = -\frac{1}{k\sqrt{2g}}\int_0^1 \frac{\psi'(u)du}{\sqrt{1-u}};$$

h bezeichnet dabei den Werth von x, für den die Geschwindigkeit 0 ist. Aus den Bedingungen des

Problems folgt, daß $\psi'(u) = -\sqrt{\frac{c}{u}}$, so daß man $\frac{4k^2gT^2}{\pi^2}x = e^{ks} - ks - 1$ erhält als Gleichung der Tautochrone, eine Curve, die für jeden Werth von k die Cycloide, die sich für $k = 0$ ergiebt, im zweiten Grade tangiren muß. Der Fall, wo an Stelle der constanten Schwerkraft ein anziehendes Centrum tritt, erledigt sich in derselben Weise wie oben aus dem ersteren.

In anderer Weise als Laplace verallgemeinerte Abel das Problem. (Siehe **Résolution d'un problème de mécanique. Crelle, Journal I. p. 153. Oeuvres complètes I. p. 27.)** Ein Punkt bewegt sich, von der Schwere in Bewegung gesetzt, auf einer Curve von einem gegebenen Punkte bis zu einem gegebenen Punkte. Man soll mit Hülfe eines bestimmten Integrals die Gleichung der Curve finden, für welche die Zeit τ eine gegebene stetige Function des durchlaufenen Bogens a ist. Bezeichnet s den Bogen, x die verticale Abscisse vom tiefsten Punkte an gerechnet, t die Zeit, die vom Ausgangspunkte bis zu (s, x) verflossen, so ist

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{a - x}}.$$

Integrirt man zwischen $x = 0$ und $x = a$, so erhält man

$$\tau = \varphi(a) = \int_0^{a} \frac{ds}{\sqrt{a - x}}.$$

Abel betrachtet statt dessen allgemeiner

$$(J) \ldots\ldots\ldots\ldots \varphi(a) = \int_0^{a} \frac{ds}{(a - x)^m},$$

eine Gleichung, aus der s als Function von x zu finden ist. Er benutzt dazu die Theorie der Gamma-Functionen. Mit ihrer Hülfe leitet er zunächst die Gleichung

$$(K) \ldots\ldots\ldots\ldots f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^{x} \frac{da}{(x - a)^{1-n}} \cdot \int_0^{a} \frac{f'(z)\,dz}{(a - z)^n}$$

ab, wo $f(x) = \int \varphi(\alpha) \cdot x^\alpha d\alpha$. Indem er nun die Gleichung (J) mit $\frac{\sin n\pi}{n} \frac{da}{(x - a)^{1-n}}$ multiciplirt und zwischen $a = 0$ und $a = x$ integrirt, erhält er

$$\frac{\sin n\pi}{n} \cdot \int_0^{x} \frac{\varphi(a)\,da}{(x - a)^{1-n}} = \frac{\sin n\pi}{n} \int_0^{x} \frac{da}{(x - a)^{1-n}} \cdot \int_0^{a} \frac{ds}{(a - x)^n},$$

woraus nach der Gleichung (K) folgt:

$$s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \cdot \int_0^{x} \frac{\varphi(a)\,da}{(x - a)^{1-n}}.$$

Setzt man hierin $n = \frac{1}{2}$, so ist das aufgestellte Problem unmittelbar gelöst. Es ergiebt sich

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^{x} \frac{\varphi(a)\,da}{\sqrt{x - a}}.$$

Anwendungen macht Abel erstens auf den Fall $\varphi(a) = \alpha_0 a^{\mu_0} + \alpha_1 a^{\mu'} + \ldots + \alpha_m a^{\mu_m}$. Setzt man dann $a = xy$, so ergiebt sich als Resultat

$$s = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \left\{ \alpha_0 \frac{\Gamma(\mu_0 + 1)}{\Gamma(\mu_0 + \frac{3}{2})} x^{\mu_0} + \alpha_1 \frac{\Gamma(\mu_1 + 1)}{\Gamma(\mu_1 + \frac{3}{2})} x^{\mu_1} + \ldots\ldots \right\}.$$

Soll die Curve isochron sein, so muß $m_0 = 0$, $\mu_0 = 0$ sein. Es folgt $s = \frac{2\alpha_1}{\pi}\sqrt{x}$, die Cycloiden-

gleichung. Der zweite Fall, den Abel als Beispiel behandelt, ist der, daß

$$\begin{aligned}\varphi(a) \quad \text{von } a=0 \text{ bis } a=a_0 &\quad \text{gleich } \varphi_0(a)\\ a=a_0 \text{ bis } a=a_1 &\quad \text{gleich } \varphi_1(a)\\ \dots\dots\dots\dots &\quad \dots\dots\dots\\ a=a_{m-1} \text{ bis } a=a_m &\quad \text{gleich } \varphi_m(a)\end{aligned}$$

sei, wobei $\varphi_0(a_0)=\varphi_1(a_0),\ \varphi_1(a_1)=\varphi_2(a_1)\dots\dots$

als Beschränkung gilt, da ja φ als stetig angenommen ist. Es folgt dann unmittelbar

$$\pi s=\int_0^x \frac{\varphi_0(a)\,da}{\sqrt{a-x}} \quad \text{von } x=0 \text{ bis } x=a_0,$$

$$\pi s=\int_0^{a_0} \frac{\varphi_0(a)\,da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_0}^x \frac{\varphi_1(a)\,da}{\sqrt{a-x}} \quad \text{von } x=a_0 \text{ bis } x=a_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pi s=\int_0^{a_0} \frac{\varphi_0(a)\,da}{\sqrt{a-x}}+\int_{a_0}^{a_1} \frac{\varphi_1(a)\,da}{\sqrt{a-x}}+\dots+\int_{a_{m-1}}^x \frac{\varphi_m(a)\,da}{\sqrt{a-x}} \quad \text{von } x=a_{m-1} \text{ bis } x=a_m.$$

An diese Arbeit von Abel knüpfen zwei andere neuere unmittelbar an, die der Herren Somoff und Meissel. Die erstere (Bulletin de l'Acad. de St. Pétersbourg. XIII. 1869) behandelt zunächst dasselbe Problem, wie die von Abel, benutzt aber nicht die Euler'schen Integrale, sondern sucht durch Transformation in ein Doppelintegral zum Ziele zu gelangen. Bezeichnet $f(x)$ die Function, die sich aus der Gleichung der Bahn für s in x ergiebt, so hat man

$$\int_0^a \frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{x-a}}=\varphi(a).$$

Herr Somoff ersetzt x durch $a\cdot\sin^2\theta$. Multiplicirt man dann mit $\frac{dx}{\sqrt{a-x}}$ und integrirt von 0 bis x. Es folgt

$$4\int_0^{x^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(r^2\sin^2\theta)\cdot r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta}{\sqrt{x-r^2}}=\int_0^x \frac{\varphi(a)\,da}{\sqrt{x-a}},$$

wo links nur $a^{\frac{1}{2}}$ durch r ersetzt ist. Betrachtet man hier r und θ als Polarcoordinaten, so ist das Doppelintegral ausgedehnt über die Fläche eines Kreises mit dem Radius $x^{\frac{1}{2}}$. Sind daher ξ und η die entsprechenden rechtwinkligen Coordinaten, so erhält man

$$4\int_0^{\sqrt{x-\eta^2}}\int_0^{x^{\frac{1}{2}}} \frac{f'(\eta^2)\,\eta\,d\eta\,d\xi}{\sqrt{x-\xi^2-\eta^2}}.$$

Dies ergiebt aber nach Ausführung der ersten Integration

$$2\int_0^{\sqrt{x-\eta^2}} f'(\eta^2)\,2\eta\,d\eta=\pi f(x),$$

so daß Herr Somoff ebenso wie Abel erhält

$$s=f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{\varphi(a)\,da}{\sqrt{x-a}}.$$

Herr Somoff verallgemeinert im Verlauf seiner Arbeit das Problem dahin, daß er an Stelle der den Punkt erregenden Schwere eine Kraft mit einem Potential u setzt und den Punkt sich auf einer

Oberfläche mit der Gleichung $F(q_1 q_2 q_3) = 0$ bewegen läßt. Die Zeit ist dabei als Function des Potentials gegeben. Nimmt man unter dieser Voraussetzung den Anfang von s so an, daß es mit wachsendem t abnimmt, so ist $\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2u - 2u_0}$ (die Anfangsgeschwindigkeit ist 0, u_0 der Anfangswerth des Potentials). Daraus ergiebt sich

$$\tau = -\int_{u_0}^{u_1} \frac{\frac{ds}{du}\,du}{\sqrt{2u - 2u_0}}$$

als Ausdruck für die Zeit der Bewegung des Punktes zwischen den beiden Niveauflächen u_0 und u_1. Setzt man nun $u_1 - u_0 = a$, $u - u_0 = x$, so hat man

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^a \frac{\frac{ds}{dx}\,dx}{\sqrt{a - x}}.$$

Soll nun τ eine gegebene Function $\Phi(u_1)$ werden, so folgt mit Anwendung des früher gefundenen Resultates

$$s = \sqrt{2} \int_{u_0}^{u_1} \frac{\Phi(u_1)\,du_1}{\sqrt{u - u_1}}.$$

Soll die Bahn tautochron sein, so muß $\sqrt{2}\,\Phi(u_1)$ constant sein, so daß sich ergiebt

$$s = A \int_{u_0}^{u} \frac{du_1}{\sqrt{u - u_1}} = 2A\sqrt{u_1 - u_0}.$$

Herrn Meissel's Arbeit (Zur Theorie der Tautochronen. Crelle's Journal Bd. XLVIII) enthält insofern eine Verallgemeinerung des Abel'schen Problems, als er statt der Schwere ein anziehendes Centrum setzt, das in der Entfernung 1 mit der Kraft α wirkt. Nimmt man die Anfangsgeschwindigkeit als 0 an und bezeichnet man die Entfernung des Anfangspunktes der Bewegung vom festen Centrum mit a, mit r die variable Entfernung der Bahnpunkte, mit φ endlich den Winkel, den r mit der kürzesten Entfernungslinie (deren Größe k) von der Bahn macht, so ergiebt sich für die Bewegungsdauer zwischen zwei Punkten der Bahn

$$T = \int_k^a \frac{\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}}{\sqrt{2\alpha\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}}\,dr.$$

Hieraus soll nun φ so in r bestimmt werden, daß T eine gegebene Function von a, $\sqrt{\frac{a}{2\alpha}}\,f(a)$, wird. Man hat also

$$f(a) = \int_k^a \frac{\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}}{\sqrt{\frac{a}{r} - 1}}\,dr \;\ldots\ldots (M).$$

Indem Herr Meissel nun

$$\sqrt{1 + r^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\,dr = \tfrac{1}{2}\frac{F(r)\,dr}{\sqrt{r^2 - kr}}$$

setzt, kann er die Gleichung auf die Form:

$$f(k+u) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(k + u \sin^2\eta)\, d\eta$$

bringen, von der aus er mit Hülfe Euler'scher Integrale zu

$$\frac{1}{2}\pi F(k+x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin\varphi \cdot f(k + x \sin^2\varphi) + 2x \sin^3\varphi f'(k + x \sin^2\varphi)]\, d\varphi$$

gelangt. Damit ist eine Gleichung gewonnen, aus der sich φ durch Quadratur in r bestimmen läßt, wenn man die Gleichung (M) zu Hülfe nimmt. Soll z. B. T constant sein, d. h. soll die Curve tautochron sein für eine nach dem Newton'schen Gesetze wirkende Schwerkraft, so ergiebt sich:

$$\varphi = \int_k^r \sqrt{\frac{\frac{2\alpha k T^2}{\pi^2} - r^3 + kr^2}{r^2 - kr}}\, \frac{dr}{r^2}.$$

Des Weiteren bestimmt dann Herr Meissel die Curve, wenn ein materieller Punkt unter dem Einfluß der constanten Schwerkraft und eines Luftwiderstandes, der dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, auf ihr eine volle Schwingung in einer von der Größe der Schwingungsamplitude unabhängigen Zeit vollendet. Die Bewegungsgleichung für dieses Problem ist, wenn λ den Widerstandsfactor bezeichnet:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g\frac{dx}{ds} - \lambda\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 0.$$

Die Fallzeit bis zum tiefsten Punkte ergiebt sich hieraus als

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_0^a \frac{e^{-\lambda s}\, ds}{\sqrt{\int_0^s e^{-2\lambda s}\, dx}},$$

während die Geschwindigkeit in diesem Punkte

$$V = \sqrt{2g}\sqrt{\int_0^a e^{-2\lambda s}\, dx}$$

ist. Da die Zweige der Curve symmetrisch zur Axe der x liegen, so ergiebt sich die Zeit des Ansteigens, ebenso wie die im tiefsten Punkte nothwendige Geschwindigkeit, um diesen Bogen zu durchlaufen, unmittelbar aus obigen Formeln, wenn man die Länge a des Absteigebogens mit der Länge b des Ansteigebogens vertauscht und die Zeichen verändert. Die volle Schwingungsdauer

$$T\sqrt{2g} = \int_0^a \frac{e^{-\lambda s}\, ds}{\sqrt{\int_0^s e^{-2\lambda s}\, dx}} + \int_0^b \frac{e^{\lambda s}\, ds}{\sqrt{\int_0^s e^{2\lambda s}\, dx}}$$

muß aber constant sein, während aus der Vergleichung der im tiefsten Punkte sich ergebenden Geschwindigkeiten

$$\int_0^a e^{-2\lambda s}\, dx = \int_0^b e^{2\lambda s}\, dx$$

folgt. Ist nun $\int_0^s e^{-2\lambda s}\, dx = f(s)$, $\int_0^s e^{2\lambda s}\, dx = \psi(s)$, $\psi(\theta, z) = f(z)$,

so folgt $$f(a) = \psi(b),\ b = \theta a.$$

Es ergiebt sich daher $$\lambda \cdot T\sqrt{2g} = \int_0^a \frac{d(e^{\lambda\theta z} - e^{-\lambda z})}{\sqrt{f(a)-f(z)}}.$$

Damit hier nun T von a unabhängig sei, ergiebt sich als Bedingung

$$e^{\lambda\theta z} - e^{-\lambda z} = \frac{2}{\pi}\lambda T\sqrt{2g}\sqrt{f(z)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (N)$$

und $$df(z) = e^{4\lambda\theta z}\, df(\theta z) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (O).$$

Setzt man, um das von der Form des bewegten Körpers abhängige λ zu entfernen, $\theta(z) = \frac{1}{\lambda}\varphi(\lambda, z)$, so erhält man ein System von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} d(e^{\varphi z} - e^{-z})^2 = e^{4\varphi z} \cdot d(e^{\varphi\varphi z} - e^{-\varphi z})^2 \\ f(s) = \frac{\pi^2}{8\lambda^2 g T^2} \cdot (e^{\varphi(\lambda s)} - e^{-\lambda s})^2 = \int_0^s e^{-2\lambda s}\, dx \end{array}\right\} \ldots\ldots (P),$$

welches zur Lösung des Problems genügt. Ist φ bekannt, so kann man aus der zweiten dieser Gleichungen x und g durch Quadratur in s bestimmen, $\varphi(z)$ aber kann aus der ersten derselben nach Potenzen von z entwickelt werden. Begnügt man sich hierbei mit den 4ten Potenzen von λ, so ergiebt sich als Relation zwischen a und b, den Bogen des Ab- und Ansteigens, sehr nahe:

$$b = \frac{a}{1 + \frac{4}{3}\lambda a}.$$

Unter den Bearbeitungen, die das Problem in Lehrbüchern erfahren hat, erwähnen wir zunächst die, welche sich in den: „Problèmes de Mécanique“ von Père Jullien findet. T. I. behandelt er zunächst die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Cycloide in einem Mittel, dessen Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist. Dies Problem wird in derselben Weise gelöst, wie wir es bei Poisson gefunden haben. Die Zeit für die Voraussetzung, daß der Widerstand k sehr klein, wird bestimmt durch die Gleichung

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} + 2k\frac{a}{g},$$

wo a der erzeugende Radius ist. Es werden ferner die Epochen der Bewegung bestimmt durch $t = 0, \frac{2}{\gamma}\pi, \frac{4}{\gamma}\pi, \ldots$, wo $\gamma = \sqrt{\frac{g}{a} - k^2}$. Die Dauer einer ganzen Oscillation beträgt also $\frac{2\pi}{\gamma}$. Auch den Fall, daß der Widerstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit ist, behandelt Herr Jullien. Es ist aber im Wesentlichen eine Reproduction der Euler'schen Methode. Auch die Aufgabe, die Lagrange sich gestellt, den allgemeinen Ausdruck für eine Tautochronismus hervorbringende Tangentialkraft zu bestimmen, findet sich dort. Es wird die von Lagrange gefundene Formel hergeleitet und untersucht, welche Fälle dieselbe enthalte. Duhamel's Mechanik enthält einen Nachweis für die tautochronische Eigenschaft der Cycloide und die Untersuchung, ob dies die einzige Tautochrone im leeren Raume sei, wenn man vom Widerstande absieht. Das neueste, und man kann wohl sagen beste, wenigstens reichhaltigste unter den deutschen Lehrbüchern der Mechanik, die Theorie der Bewegung und Kräfte von Herrn Schell enthält neben Ableitung der tautochronischen Eigenschaft der Cycloide auch eine Reproduction des von Abel aufgestellten Problems.

Es bleiben uns zum Schluß noch zwei Arbeiten zu besprechen, die in den letzten Jahren über diesen Gegenstand erschienen. Herr Haton de la Goupillière (Sur le tautochronisme des

épicycloides, Comptes Rendus LXVI. Liouville's Journal 2 série XIII) behandelt das Problem unter der Voraussetzung, daß die Kraft von einem Centrum ausgeht und proportional der Entfernung von demselben wirkt, wobei der Widerstand proportional der Geschwindigkeit ist und zugleich die Reibung berücksichtigt wird. Bezeichnet man mit kr die anziehende oder abstoßende Kraft, mit f den Reibungscoefficienten und mit $\varphi(\nu)$ den Widerstand, so ist der Ausdruck für die Tangentialkraft:

$$S = kr \cdot \frac{dr}{ds} - \varphi(\nu) - f \cdot \left[\nu^2 \cdot \frac{1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}{r\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}} + kr \cdot \sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}} \right].$$

Herr Haton de la Goupillière benutzt nun die von Lagrange gegebene Formel, um zum Ziele zu gelangen. Da er den Widerstand proportional der Geschwindigkeit annimmt, so gehört der von ihm betrachtete Fall unter diejenigen, für welche, wie Herr Bertrand gezeigt, diese Formel Geltung hat. Auf einem Wege, ähnlich dem des Herrn Bertrand, gelangt er dann zu:

$$S = A\xi - B\nu + \frac{\nu^2}{\xi}\left(\frac{C}{A} - \frac{d\xi}{ds}\right) + D\nu \log \frac{\nu}{\xi}.$$

Durch Bestimmung der Constanten kommt er dann endlich zu der Gleichung

$$\frac{dr^2}{ds^2} + r\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{\frac{C}{k} + f^2}{1 + f^2},$$

so daß er sein Endresultat in folgenden Worten zusammenfassen kann: „L'épicycloide est encore tautochrone pour des forces attractives ou répulsives proportionnelles à la distance, lorsqu'on a égard au frottement. Le point d'isochronisme est alors celui, dont le rayon vecteur fait avec la normale l'angle de frottement. Ce tautochronisme n'est pas troublée, quand on introduit, en outre, une résistance proportionnelle à la vitesse."

Wichtiger ist die zweite Arbeit von Herrn Hoppe (Tautochronische Curven bei Reibungs-Widerstand. Schlömilch's Zeitschrift. XIV.) Herr Hoppe behandelt in derselben die Aufgabe im strengen Sinne des Tautochronismus bei Reibungswiderstand. Er unterscheidet aber 4 Arten solcher Curven, die der constanten Fall- und Steigzeit, die Curven, bei denen die Zeit durch die Umkehrpunkte begrenzt, und endlich diejenigen, wo die Zeit von dem Durchgang durch den Indifferenzpunkt der äußeren Kraft bis zur Rückkehr in denselben bestimmt wird. Giebt es ein Potential, so genügen dieselben Curven. Dann giebt es aber unendlich viele solcher Curven, indem der eine Zweig beliebig ist und der zweite durch den ersten bestimmt wird. Es ist dies ein Resultat, das wir schon bei Euler für den Fall des leeren Raumes ohne Reibung gefunden haben. Haben dagegen die Kräfte kein Potential, so werden die Curven verschieden. Wir glauben, uns hier mit dieser kurzen Andeutung der wichtigen Resultate begnügen zu können, da die Arbeit, der Zeit ihres Erscheinens nach, noch kaum in den Bereich der Geschichte gehört, und erwähnen sie nur, weil damit vielleicht ein Ausgangspunkt gewonnen ist, an den sich weitere Untersuchungen dieser Frage knüpfen können.

Literatur-Verzeichniß.

N. Abel, Auflösung eines mechanischen Problems. Crelle, Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 1. p. 157 und Abel, Oeuvres complètes, T. I. p. 27.

d'Alembert, Sur les tautochrones. Mémoires de l'Académie de Berlin 1765. p. 351—413.

—— Extrait d'une lettre à Mr. de Lagrange. Mémoires de l'Académie de Berlin 1763. p. 260—266.

J. Bernoulli, Méthode pour trouver les tautochrones dans des milieux résistans comme le quarré des vitesses. Mémoires de l'Académie de Paris 1730. p. 78—101.

J. Bertrand, Note sur le problème des tautochrones. Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées. 1 série. T. XII. 1847.

Brioschi, Sulle linee tautochrone. Tortolini, Annali di scienze matematiche e fisiche. T. II und III. 1852 und 1853.

Duhamel, Lehrbuch der Mechanik, übersetzt von Wagner. I. p. 292.

L. Euler, De innumerabilibus curvis tautochronis in vacuo. Commentarii Acad. Petropolitanae. IV. 49—66. 1729.

Curva tautochrona in fluido resistentiam faciente secundum quadrata celeritatum Ibidem p. 67—89. Mechanik. Prop. 46.

Constructio linearum isochronarum in medio quocunque resistente. Acta Erudit Lipsiae 1726. p. 361—363.

Fontaine, Sur les courbes tautochrones. Mémoires de l'Académie de Paris 1734.

Addition au Mémoire imprimé en 1734 sur les courbes tautochrones. Mémoires de l'Académie de Paris 1768. p. 460—470.

Haton de la Goupillière, Sur le tautochronisme des épicycloides, quand on a égard au frottement. Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées. 2 série. XIII.

J. Herrmann, Acta Erudit. Lipsiae 1737. p. 222. 1738. p. 272.

R. Hoppe, Tautochronische Curven bei Reibungswiderstand. Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik. XIV. p. 382—387. 1869.

C. Huyghens, De horologio oscillatorio. P. II. Prop. 25.

M. Jullien, Problèmes de Mécanique rationelle. T. I. p. 392. 1855.

Lagrange, Sur les courbes tautochrones. Mém. de l'Acad. de Berlin 1765. p. 364—380.

Nouvelles réflexions sur les courbes tautochrones. Mém. de l'Acad. de Berlin 1770. p. 97—122.

Laplace, Mécanique céleste. T. I. Livre I. Chap. II. § 12. 1792.

E. Meissel, Zur Theorie der Tautochronen. Crelle, Journal für reine und angewandte Mathematik. XLVIII. 317—324.

L. Necker, Solution de quelques problèmes de mécanique. Mém. de Math. et de Phys. prés. à l'Acad. de Paris par divers savans étrangers. T. IV. p. 96. 1743.

J. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica. Lib. I. Prop. LI, Lib. II. Prop. XXVI. 1714.

Poisson, Traité de Mécanique. I. p. 368 (2me éd.). 1833.

V. Puiseux, Sur les courbes tautochrones. Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées. 1 série. IX. p. 409—421. 1844.

W. Schell, Theorie der Bewegung und Kräfte. p. 330. 1870.

J. Somoff, Note sur la solution, donnée par Abel, d'un problème de mécanique. Bull. de l'Acad. de St. Pétersbourg. T. XIII. p. 469. 1869.

Biographische Notizen.

Niels Henrik Abel, geboren den 5. August 1805 im Kirchspiel Findöe in Norwegen, lebte von 1825 bis 1827 auf Kosten der norwegischen Regierung in Berlin und Paris, Mathematik studirend. Im Jahre 1828 vertrat er Professor Hansteen an der Universität zu Christiania und starb schon am 6. April 1829 auf dem Eisenwerk Froland bei Arendal, als er eben Aussicht bekommen, dauernd nach Berlin zu kommen.

Jean le Rond d'Alembert, am 16. November 1717 an der Thür der Kirche Jean le Rond zu Paris als Findling aufgefunden, ist wahrscheinlich der Sohn einer Frau Tensin, Kanonissin von Beaujeu und eines Commissaire d'artillerie Destouches. Er lebte in Paris, wo er 1736 Mitglied der Akademie wurde. 1746 folgte er einem Rufe an die Berliner Akademie, von wo er jedoch später nach Paris zurückkehrte. Gestorben am 29. October 1783 zu Paris.

Johann Bernoulli ist geboren am 27. Juli 1667 zu Basel, war von 1695 bis 1705 Professor der Mathematik an der Universität zu Gröningen. Nach dem Tode seines Bruders Jacob übernahm er dessen Professur der Mathematik zu Basel. 1699 auswärtiges Mitglied der Pariser Akademie geworden, starb er am 1. Januar 1748 in seiner Vaterstadt.

Joseph François Bertrand ist geboren am 11. März 1822 zu Paris; er war Repetitor an der École Polytechnique zu Paris, seit 1856 Mitglied der Akademie der Wissenschaften daselbst.

Jean Marie Constant Duhamel, geboren den 5. Februar 1797 zu St. Malo, war früher Studiendirector der École Polytechnique zu Paris, dann Professor der Analyse an der Faculté des Sciences und an der École Normale daselbst. Seit 1840 Mitglied der Pariser Akademie, lebt er meist in Paris.

Leonhard Euler, geboren den 15. April 1707 zu Basel, war der Sohn eines Pfarrers, der eng mit den Bernoulli's befreundet war. Er studirte in Basel erst Theologie, dann Mathematik und Physik, später auch Medicin. 1727 ging er als akademischer Adjunct der höheren Mathematik nach Petersburg, ward 1730 Professor der Physik, 1733 Professor der höheren Mathematik. 1741 ging er als Professor der Mathematik nach Berlin, wurde 1744 Director der mathematischen Klasse der Berliner Akademie, von wo er im Jahre 1766 an die Petersburger Akademie zurückging. Nachdem er bereits 1735 auf einem Auge erblindet, wurde er 1766 gänzlich blind und starb am 7. September 1783 zu Petersburg.

Alexis Fontaine des Bertins ist geboren im Jahre 1705 zu Clavaison in der Dauphinée. Er lebte als vermögender Privatmann zu Paris, wissenschaftlichen Studien hingegeben und war Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften daselbst. Gestorben am 21. August 1771 zu Cuiseaux in der Franche Comté.

Jacob Herrmann, geboren den 16. Juli 1678 zu Basel, war Schüler von Jacob Bernoulli. Von 1707—1713 Professor der Mathematik an der Universität zu Padua, dann zu Frankfurt a. d. O., von 1724 zu Petersburg, kehrte er 1731 als Professor der Moralphilosophie nach Basel zurück, wo er am 11. Juli 1733 starb.

Ernst Reinhold Eduard Hoppe, geboren den 18. November 1816 zu Naumburg a. d. Saale, war nach einander Lehrer an der Erziehungs-Anstalt zu Keilhau in Schwarzburg-Rudolstadt, seit 1854 Privatdocent an der Universität zu Berlin. 1858 ging er als Lehrer an das Gymnasium in Glogau, kehrte jedoch im folgenden Jahre nach Berlin zurück, wo er 1869 zum Professor ernannt wurde.

Christian Huyghens, zweiter Sohn von Constantin Huyghens, Herrn von Zelem und Zuylichem, Cabinetsraths der Statthalter Friedrich Heinrich, Wilhelm II. und III. von Oranien, geboren den 14. April 1629 im Haag, studirte in Leyden und Breda Jura, machte dann große Reisen durch Deutschland, Frankreich und England. Er wurde im Jahre 1666 wirkliches Mitglied der neugestifteten Akademie zu Paris, kehrte jedoch 1684 nach der Aufhebung des Edicts von Nantes nach seiner Vaterstadt zurück, wo er als Privatmann lebte und am 8. Juni 1695 starb.

Joseph Louis de La Grange ist geboren den 25. Januar 1736 zu Turin und stammt aus einer dort seit 1672 angesessenen französischen Adelsfamilie. Nachdem er seine erste Erziehung in seiner Vaterstadt genossen, wurde er 1755 bereits Professor der Mathematik an der Artillerieschule zu Turin. Im Jahre 1766 nach Euler's Abgang berief ihn Friedrich der Große als Director der mathematischen Klasse der Akademie nach Berlin, von wo er 1787 nach Paris ging. Dort war er Mitglied der Akademie, später Professor der Mathematik an der École Normale und Polytechnique. Zugleich war er Mitglied des Bureau des Longitudes, Senator u. s. w. Er starb am 10. April 1813 zu Paris.

Pierre Simon Marquis de La Place, geboren den 28. März 1749 zu Beaumont en Auge (Depart. Calvados), war zuerst Lehrer der Mathematik an der Militairschule seiner Vaterstadt, wurde dann in Paris Examinator beim Artilleriecorps, später Lehrer an der École Normale. Unter der Consular-Regierung 1799 Minister des Innern, wurde er Mitglied und seit 1803 Kanzler des Erhaltungssenats. Von Napoleon zum Grafen, von Ludwig XVIII. zum Pair und 1817 zum Marquis ernannt, starb er am 5. März 1827 zu Paris.

Daniel Friedrich Ernst Meissel, Dr. phil., ist geboren den 31. Juli 1826 zu Neustadt-Eberswalde; war zuerst Lehrer der Mathematik für die Studirenden des Berg-, Hütten- und Salinenfachs, zugleich Privatdocent an der Bau-Akademie zu Berlin, von wo er 1856 als Director der Realschule zu Iserlohn berufen wurde.

Louis Necker war der Sohn von Carl Friedrich Necker aus Küstrin, Professor des öffentlichen Rechts in Genf († 1760). Er ist geboren 1730 zu Genf, ein Bruder des berühmten französischen Finanzministers Jaques Necker. Von 1757 bis 1762 Professor der Mathematik in Genf, ging er als Banquier nach Paris, später nach Marseille, kehrte aber in späteren Jahren nach seiner Vaterstadt Genf zurück, wo er 1804 als Privatmann starb.

Isaac Newton wurde als Sohn eines kleinen Gutsbesitzers am 23. December 1642 zu Whoolstarpe (Lincoln) geboren. Seine erste Bildung erhielt er in der kleinen, seinem väterlichen Gute benachbarten Stadt Gratham. 1660 bezog er das Trinity-College in Cambridge, an dem er nach Erlangung der akademischen Grade 1669 Professor der Mathematik an J. Barrow's Stelle wurde. 1635 wurde er Aufseher der Königl. Münze, 1699 Münzmeister, siedelte jedoch 1701, wo er Par-

lamentsmitglied geworden, nach London über. Schon seit 1671 zum Mitglied der Royal Society ernannt, wurde er 1703 deren Präsident. 1699 wurde er auswärtiges Mitglied der Pariser Akademie. 1705 endlich zum Sir erhoben. Er starb am 20. März 1726 zu London.

Siméon Denis Poisson, geboren den 21. Juni 1781 zu Pithiviers im Departement Loiret, war von 1798 bis 1800 Schüler der École Polytechnique zu Paris, später Repetent, dann Professor der Analyse und Mechanik und Examinator ebendaselbst; daneben lehrte er Mechanik an der Facultät der Wissenschaften, war Mitglied der Akademie (seit 1812), des Längenbureaus, des Raths des öffentlichen Unterrichts. Von Napoleon geadelt und 1837 zum Pair von Frankreich ernannt, starb er den 25. April 1840 zu Paris.

Victor Alexandre Puiseux, geboren den 16. April 1820 zu Argenteuil (Departement Seine-et-Oise), war von 1841 bis 1845 Professor der Mathematik am Collége zu Rennes, dann bis 1849 an der Facultät zu Besançon, von 1849—1855 Maître de conférence an der École Normale zu Paris, zugleich 1853 und 1854 Examinateur d'admission bei der École Polytechnique, 1855 bis 1859 „Astronome adjoint" der Pariser Sternwarte, seit 1857 Professor der Astronomie an der Faculté des Sciences daselbst.

Wilhelm Schell, geboren den 3. October 1846 zu Fulda, war früher Professor der Mathematik zu Marburg und ist jetzt Professor der Mathematik an dem Polytechnicum zu Karlsruhe.

Joseph Somoff, geboren den 18. Juni 1815 im Gouvernement Moskau, ist Professor der Mathematik an der Universität zu St. Petersburg.

Königl. Real-

Lehrpensa von Ostern

Klasse.	Religion.	Deutsch.	Latein.	Französisch.	Englisch.
VI.	Erlernung des 1. und 2. Hauptstücks. Biblische Geschichte des alten Testaments nach Zahn. Kirchenlieder.	Die Wortarten, der einfache und der erweiterte Satz. Lesen, Declamiren, orthographische Uebungen nach Hopf und Paulsiek's Lesebuch.	Regelmäßige Declination und Conjugation, Genusregeln, nach Fromm. Tirocinium und Militia 1 – 40.		
V.	Erlernung des 3., 4. und 5. Hauptstücks. Biblische Geschichte des neuen Testaments nach Zahn. Kirchenlieder.	Declination und Conjugation, Lesen, Declamiren, orthographische Uebungen nach Hopf und Paulsiek.	Comparation, Deponentia, Pronomina, Präpositionen, nach Fromm. Tirocinium und Militia 41 – 86.	avoir und être, regelmäßige Pluralbildung, 1. regelmäßige Conjugation nach Plötz' Elementargrammatik 1 – 60.	
IV.	Wiederholung der Pensa V. und VI., das Kirchenjahr, die biblischen Bücher, biblische Geographie. Kirchenlieder.	Der zusammengesetzte Satz, Interpunction, Lesen, Declamiren, orthographische Uebungen nach Hopf und Paulsiek. Aufsätze erzählenden Inhalts (Reproduction).	Wiederholung des Früheren. Unregelmäßige Verba, Numeralia, nach Fromm. Abl. abs. und Acc. cum Inf. Uebersetzungen aus D. Schulz' Aufgaben. Lectüre aus Gedike's Lesebuch (Fabeln 2c.).	Die drei anderen regelmäßigen Conjugationen, das Passif, die Adjectifs und die Pronoms nach Plötz 61 bis 100.	
III. B.	Erklärung des 1. und 3. Hauptstücks. Erlernung einschlagender Sprüche und Lieder. Lectüre der heiligen Schrift.	Ausführung der Lehre vom zusammengesetzten Satz. Aufsätze beschreibenden Inhalts (nach der Anschauung). Lesen und Declamiren nach Hopf und Paulsiek.	Bildung der Adverbia, ut, quod, Acc. cum Inf., Participial- und Relativ-Construction nach Fromm und D. Schulz' Aufgaben. Lectüre aus Gedike.	Die unregelmäßige Pluralbildung und die unregelmäßigen Verba. Das Wichtigste über die Wortstellung, nach Plötz. Lectüre aus Fränkel's Cours de leçons I.	Aussprache, Formenlehre, Erlernen von Vocabeln, Uebersetzungen aus Schneider's Lehrbuch.
III. A.	Erklärung des 2. Hauptstücks, Wiederholung des 1. und 3. — Lectüre der Evangelien und der Apostel-Geschichte.	Conditionalsätze. Rection der Adjectiva und der Verba. Aufsätze historischen oder geographischen Inhalts. Lectüre einzelner Stücke von Lessing u. A.	Casuslehre nach Fromm's Grammatik und D. Schulz' Aufgaben. Abschnitte aus Cäsar's Comm. de bello gallico.	Wiederholung und Ergänzung alles bisher Gelernten nach Plötz' Schulgrammatik. Lectüre aus Fränkel's Cours de leçons II.	Unregelmäßige Verba, Pronomina, Zahlwörter, Präpositionen und Conjunctionen nach Schneider's Lehrbuch. Lectüre aus W. Irving's Alhambra Tales.
II. B.	Geschichte des Reiches Gottes unter dem alten Bunde und Bibelkunde des alten Testaments. Lectüre der zugehörigen Bibelstellen. Wiederholung des Katechismus. Erlernen von Psalmen und Liedern.	Das Wichtigste aus der Metrik im Anschlusse an Lectüre aus Schiller. Hauptregeln über die Disposition bei Besprechung der Aufsätze.	Moduslehre nach Fromm's Grammatik und D. Schulz' Aufgaben. Abschnitte aus Cäsar's Comm. de bello civili.	Construction und Wortstellung, Lehre von den Zeiten, vom Subj. und vom Part. passé nach Plötz' Schulgrammatik. Uebersetzung aus Haffmann's Aufgaben. Lectüre aus Herrmann und Büchner (erzählende Abschnitte).	Gebrauch der Präpositionen und des Artikels, Bildung und Stellung der Adverbia, die Pronominalzahlwörter, nach Schneider's Lehrbuch. Lectüre aus Ch. Dickens' History of England
II. A.	Heilsgeschichte, Bibelkunde des neuen Testaments, Sprüche, Lieder, Psalmen.	Das Wichtigste aus der Rhetorik und der deutschen Poetik im Anschluß an die Lectüre Goethe'scher Werke. Uebungen im Disponiren und im freien Vortrage über deutsche Dramen.	Wiederholung und Ergänzung der Syntax; Prosodie; Hexameter und Pentameter; nach Fromm's Grammatik und D. Schulz' Aufgaben. Sallust. Jugurtha nebst einigen Stücken aus Ranke's Chrestomathie.	Syntax nach Plötz' Schulgrammatik 50 – 78. Uebersetzung aus Hoffmann's Aufgaben. Lectüre aus Herrmann und Büchner (rhetorische Abschnitte), le verre d'eau und les contes de la reine de Navarre.	Satzlehre und Einübung der unregelmäßigen Formen nach Schneider's Lehrbuch Aufsätze. Lectüre aus Herrig's Handbuch (Gibbon, Thackeray, Byron).
I.	Glaubens- und Sittenlehre. Evangelium Johannis und Brief an die Römer. Das Wichtigste aus der Kirchengeschichte.	Allgemeine Litteraturgeschichte. Das Wichtigste aus der Stilistik bei Durchnahme der Aufsätze. Uebungen im Disponiren und Vortragen. Besprechung der wichtigsten deutschen und fremdländischen Dramen.	Livius I, 30 bis III. nebst verschiedenen Abschnitten aus Ovid und Vergil nach Ranke's Chrestomathie, mit sachlichen und sprachvergleichenden Erklärungen.	Wiederholung und Ergänzung der Syntax. Uebersetzungen aus Schiller's dreißigjährigem Kriege. Aufsätze. Lectüre: Athalie und les femmes savantes.	Ergänzung der Syntax, eigenthümliche Constructionen, Lehre vom Infinitiv Aufsätze. Lectüre aus Herrig's Handbuch (Franklin und Grattan) und King Richard III.

Schule zu Berlin.

1871 bis Ostern 1872.

Mathematik und Rechnen.	Geschichte und Geographie.	Naturgeschichte.	Physik.	Chemie.	Mechanik.
Einübung der neuen Maße und Gewichte, Addiren und Subtrahiren der Decimalbrüche nach Löw's Rechenbuch.	Länder und Meere nach Voigt's Leitfaden, 1. Cursus.	Beschreibung von Thieren aus verschiedenen Classen, nach Leunis' analytischem Leitfaden			
Gewöhnliche Brüche. Dividiren und Multipliciren der Decimalbrüche. Reduciren und Resolviren nach Löw's und Koch's Rechenbüchern.	Asien, Afrika, Amerika, Australien nach Voigt.	Die Säugethiere, namentlich die einheimischen, nach Leunis			
Einfache und zusammengesetzte Regeldetri nebst Zinsrechnung, nach Koch. Planimetrie bis zum gleichschenkligen Dreieck einschließlich, nach Kambly.	Deutschland und das übrige Europa, nach Voigt, 2. Cursus. Deutsche und brandenburgische Geschichte bis zur Reformation, nach Voigt.	Im Sommer Bau der Pflanzen, Linné's System, Fruchtbildung, nach Leunis' Schul-Naturgeschichte. Im Winter Vögel, namentlich einheimische.			
Procentbestimmung, Gewinn und Verlust, Rabat-, Discont-, Tara-, Termin- und Mischungs-Rechnung, nach Koch. Parallelogramm und Kreis, nach Kambly.	Deutschland speciell, nach Voigt, 2. Cursus. Deutsche und brandenburgische Geschichte bis 1815, nach Voigt	Im Sommer Terminologie der Früchte, Demonstrationen; Nachweisung der natürlichen Verwandtschaft. Im Winter Repetition und Vervollständigung der Pensa von V und IV.			
Buchstabenrechnung, Potenzlehre, Quadrat- und Cubikwurzeln, Gleichungen des 1. Grades, nach Koch. Inhaltsbestimmung, Proportionalität, Aehnlichkeit der Dreiecke, nach Kambly.	Asien, Griechenland, das römische Reich, mathematische Geographie nach Voigt. Orientalische, griechische und römische Geschichte, nach Voigt.	Im Sommer das natürliche Pflanzensystem, Excursionen. Im Winter Wirbellose Thiere.			
Gleichungen des 1. und 2. Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten, Logarithmen, Umformungen. Ebene Trigonometrie nach Huberdt's Lehrbuch.	Das Mittelalter und neuere Geschichte bis 1815 nach Dielitz, nebst Geographie der in der Geschichte besprochenen Länder.	Im Sommer Fortsetzung des Pensums von IIIA, die Culturpflanzen, Physiologie der Pflanzen. Excursionen. Im Winter Naturgeschichte des Menschen.	Im Sommer Mechanik der festen Körper. Im Winter Mechanik der flüssigen und der gasförmigen Körper nach Brettner.	Chemie der Metalloide, nach Evers.	
Gleichungen höherer Grade, Progressionen, Permutationen, Variationen, Combinationen, der binomische und der polynomische Lehrsatz. Stereometrie.	Repetition und Ergänzung des Pensums von IIB, nebst Geographie der betheiligten Länder, auch der außereuropäischen.	Im Sommer Geologie. Im Winter Mineralogie, Krystallographie, Gebrauch des Löthrohrs.	Im Sommer Wärmelehre. Im Winter Magnetismus und Reibungs-Elektricität, nach Brettner.	Im Sommer Chemie der leichten Metalle nebst Arsen und Antimon. Im Winter Chemie der schweren Metalle mit Ausnahme der edlen Metalle.	
Die Reihen, Elemente der Differentialrechnung, Maximum und Minimum. Sphärische Trigonometrie und analytische Geometrie.	Repetition der ganzen Geschichte (innere Entwickelung, Verfassungen, Handel, Colonien ꝛc.), englische und französische Geschichte; Repetition der Geographie.		Optik, nach Brettner.	Im Sommer Erdmetalle. Abschnitte aus der Technologie, die edlen Metalle. Im Winter organische Chemie. Repetitionen. Praktische Arbeiten im Laboratorium.	Statik und Mechanik fester und tropfbar flüssiger Körper.

Vor

Pensen-Tabelle für den Zeitraum

Klasse.	Religion.	Deutsch. a) Lesen.	b) Grammatik.	c) Orthographie.
I. A. und I. B.	Wiederholung der biblischen Geschichten des alten Testaments. Ausgewählte Geschichten des neuen Testaments. 2. Hauptstück, 1. Artikel mit Erklärungen, 3 Lieder, Gebete, Sprüche. Fürbringer's biblische Geschichten II. Th.	Leseübungen in dem Lesebuche von Gude und Gittermann (mittlere Stufe). Mündliches Wiedererzählen, Vortrag von Gedichten.	Wiederholung und Ergänzung. — Redetheile. — Conjugation. — Wortbildung. Der einfache Satz und seine Glieder. Hermes' Elementarlehre der deutschen Sprache.	Dictate über die bisher vorgekommenen Regeln, ferner über die Unregelmäßigkeiten des Schreibgebrauchs. Hermes' Elementarlehre der deutschen Sprache.
II. A. und II. B.	Josua, Samuel, Saul, David und Salomo. Aus dem neuen Testament: Festgeschichten. Jüngling zu Nain. 1. Hauptstück mit Erklärungen, 3 Lieder, Gebete. Fürbringer's biblische Geschichten II. Th.	Leseübungen in dem Lesebuche von Gude und Gittermann (untere Stufe). Erlernen von Gedichten.	Dingwort, Artikel, Fürwort, Zahlwort, Eigenschaftswort und Zeitwort. Hermes' Elementarlehre der deutschen Sprache.	Dictate mit besonderer Berücksichtigung der Ableitung sowie der Dehnung und Schärfung der Vocale.
III. A. und III. B.	Moses, Auszug aus Aegypten, Gesetzgebung auf Sinai, Moses' Tod, Josua. Aus dem neuen Testament: Festgeschichten und der zwölfjährige Jesus. Gebote mit Erklärungen, 2 Lieder, Vaterunser. Fürbringer's biblische Geschichten I. und II. Th.	Leseübungen in der Handfibel von O. Schulz. Erlernen von Gedichten.	Dingwort, Artikel, Eigenschaftswort, Zeitwort. Hermes' Elementarlehre der deutschen Sprache.	Orthographische Uebungen mit Berücksichtigung der Abstammung und Ableitung der Wörter. — Verlängerung der Wörter
IV. A. und IV. B.	Isaak, Jakob, Joseph, Moses. Aus dem neuen Testament: Festgeschichten. Gebote ohne Erklärungen, 2 Lieder, Gebete. Fürbringer's biblische Geschichten I. Th.	Leseübungen in der Fibel von A. Böhme (von Nr. 117 bis zu Ende).		Aneignung von 50 Sätzen, welche sich aus den in Nr. 156 (Böhme) gestellten Fragen ergeben. Dictate nach der Regel: Schreibe, wie du richtig sprichst.
V. A. und V. B.	Schöpfung, Paradies, Sündenfall, Kain und Abel, Abraham. Aus dem neuen Testament: Festgeschichten. Gebete. Fürbringer's biblische Geschichten I. Th.	Einübung der Laute und Buchstaben in der deutschen Schreib- und Druckschrift nach der Fibel von A. Böhme (Nr. 1—67 und 101 und folgende Stücke).		Uebungen im Abschreiben der gelesenen Sätze und Aufschreiben leichter Wörter und Sätze aus dem Kopfe.

schule.

von Ostern 1871 bis Ostern 1872.

d) Sprechübungen.	Rechnen.	Geographie.	Zeichnen.	Schreiben.	Gesang.
	Die 4 Rechnungsarten mit benannten ganzen Zahlen, mündlich und schriftlich. Koch's Aufgaben II. und III. Th.	Wiederholung von Europa; die andern Erdtheile nach ihren Grenzen, Inseln, Halbinseln, Meerbusen, Gebirgen, Flüssen, Ländern und Zonen.	Geradlinige Figuren.	Uebungen in der Current- und Cursivschrift.	Notenkenntniß. Einübung der Tonleiter. Choräle und einstimmige Lieder. Deutscher Liederhain von Kienholz.
	Einübung der Division, Resolution und Reduction. Einmaleins mit 16, 24, 25. Koch's Aufgaben I. und II. Th.	Globus. — Europa nach seinen Grenzen, Meerbusen, Inseln, Hauptgebirgen, Flüssen, Ländern und Hauptstädten.	Gerade Linien und leichte Figuren.	Uebungen des kleinen und großen deutschen und lateinischen Alphabets. Wörter und Sätze in beiden Schriftarten.	
	Subtraction und Multiplication mehrstelliger Zahlen. Mündlich: Die 4 Rechnungsarten im erweiterten Zahlenkreise. Einmaleins mit 12, 15. Koch's Aufgaben I. Th.	Heimathskunde. — Geographische Vorbegriffe		Uebungen der deutschen Schrift und des lateinischen Alphabets, in Wörtern und kleinen Sätzen.	
Besprechung und Erklärung von Bildertafeln und erlernten kleinen Gedichten.	Mündlich: Die 4 Rechnungsarten im Zahlenkreise von 1—100. Schriftlich: Addition mehrstelliger Zahlen. Das kleine Einmaleins. Rechentafeln von Rosbund.			Uebungen der deutschen Schrift und der kleinen lateinischen Buchstaben, einzeln, in Silben, Wörtern und Sätzen.	
Besprechung von Gegenständen der unmittelbaren Anschauung, von Bildertafeln und erlernten kleinen Gedichten.	Die 4 Rechnungsarten im Zahlenkreise von 1—20. Rechentafeln von Rosbund.			Einübung der kleinen und großen deutschen Buchstaben, einzeln und in Wörtern.	

Königl. Elisabeth-

Unterrichts-

Klasse.	Religion.	Deutsch.	Französisch.	Englisch.
I. Cursus: 2 Jahre.	Glaubenslehre, angeschlossen an das 2. Hauptstück. Bibellesen. — Repetitionen.	Aufsätze abhandelnder Art. Dispositionen. Logische und grammatische Erörterungen. Lectüre classischer Dramen und Abhandlungen. Uebungen im Vortrage. Deutsche Literaturgeschichte.	Grammatik. Repetitionen und Erweiterungen (Plötz, Schulgrammatik). Exercitien, Extemporalien, freie Compositionen. Lectüre: Classische Dramen und Seinecke III. Sprechübungen u. Conversation.	Grammatik: Fölsing II. Mündliche und schriftliche Uebungen. Lectüre: Classische Prosa und Poesie. Sprechübungen und Conversation.
II. Cursus: 1 Jahr.	Sittenlehre, angeschlossen an das 1. Hauptstück. Bibellesen. Bibelstellen, Sprüche, Kirchenlieder.	Aufsätze (Schilderungen, Abhandlungen). Dispositionen. Grammatik: Satzlehre, Periodenbau. Metrik und Poetik. Uebungen im Vortrage. Lectüre: Schiller's Balladen u. Romanzen.	Grammatik: Plötz, § 70—78. Exercitien, Extemporalien. Lectüre: Seinecke III. Sprech- und Memorirübungen.	Grammatik: Plate I, Lect. 32—66. Mündliche und schriftliche Uebungen.
III. Cursus: 1 Jahr.	Geschichte der Offenbarung im Zusammenhange. 4. und 5. Hauptstück. Bibelsprüche, Kirchenlieder.	Aufsätze (Beschreibungen, Briefe). Grammatik: Der zusammengesetzte Satz, Bindewort, Interpunction. Lesen und Analysiren (Oltrogge 2). Biographieen neuerer Dichter.	Grammatik: Plötz, § 46—69. Exercitien, Extemporalien. Lectüre: Seinecke II. Sprech- und Memorirübungen.	Grammatik: Plate I, Lect. 1—31. Mündliche und schriftliche Uebungen.
IV. A. Cursus: 1 Jahr.	Einleitung in das alte und neue Testament. 3. Hauptstück erklärt. Sprüche, Kirchenlieder.	Aufsätze (Erzählungen, Beschreibungen). Grammatik: Der einfache und zusammengesetzte Satz. Rectionslehre. Lesen und Nacherzählen (Oltrogge 2).	Grammatik: Plötz, § 24—45. Exercitien, Extemporalien. Lectüre: Seinecke I. Sprech- u. Memorirübungen.	
IV. B. Cursus: ½ Jahr.	Leben Jesu. Wunder, Gleichnisse. Kirchenlieder. Wiederholung der 3 Hauptstücke.	Aufsätze (Nachbildungen). Grammatik: Der einfache Satz. Modi. Wortlehre. Lesen und Besprechen (Oltrogge 1).	Grammatik: Plötz, § 1—23. Exercitien, Extemporalien. Lectüre: Seinecke I.	
V. A. Cursus: ½ Jahr.	Biblische Historien: David bis Rückkehr aus dem Exil. Kirchenlieder. 3. Hauptstück wiederholt.	Aufsätze (Nachbildungen). Grammatik: Der einfache Satz. Formwörter. Orthographie. Lesen und Besprechen (Oltrogge 1).	Grammatik und Uebungen (Plötz, Conjugaison, Lect. 26 bis 55).	
V. B. Cursus: ½ Jahr.	Biblische Historien; Gesetzgebung bis Saul. 3. Hauptstück gelernt. Kirchenlieder.	Grammatik: Begriffswörter. Wortbildung. Orthographie. Lesen und Besprechen (Oltrogge, Elementar-Cursus).	Grammatik und Uebungen (Plötz, Conjugaison, Lect. 1 bis 25).	
VI. A. Cursus: ½ Jahr.	Biblische Historien: Joseph bis Gesetzgebung. Einige Wunder Jesu. 2. Hauptstück mit Erklärung. Kirchenlieder.	Grammatik: Begriffswörter. Flexion. Wortbildung. Orthographie. Lesen, Sprechübungen (Oltrogge, Elementar-Cursus).	Uebungen nach Plötz, Syllabaire, Lect. 40—78.	
VI. B. Cursus: ½ Jahr.	Biblische Historien: Weisen aus dem Morgenlande bis Jesu Verurtheilung. 2. Hauptstück ohne Erklärung. Kirchenlieder.	Grammatik: Begriffswörter. Declination. Orthographie. Lesen (Oltrogge, Elementar-Cursus), Sprechübungen (Bildertafel).	Uebungen nach Plötz, Syllabaire, Lect. 1—39.	
VII. A. und B. Cursus: je ½ Jahr.	Biblische Historien des alten Testaments bis Mosis Geburt. 1. Hauptstück mit d. Erklärung. Kirchenlieder, Sprüche, kleine Gebete.	Schreiblesen, Buchstabiren, geläufiges Lesen (Böhm und Oltrogge). Sprechübungen (Bildertafel).		

Verzeichniß

Bibel. (Klasse IV. b. — I.)
Katechismus. Gesangbuch. (VII. a. — I.)
Jahn, B. Biblische Historien. (VII. a. — V. a.)
Böhm, Bilderfibel. (VII. b.)
Oltrogge, Elementar-Cursus. (VII. a. — V. b.)

Oltrogge, Deutsches Lesebuch I. (V. a. — IV. b.)
——, Deutsches Lesebuch II. (IV. a. — III.)
Wetzel, Leitfaden. (VI. a. — II.)
Deutsche Classiker. (II. I.)
Plötz, Syllabaire. (VI. b. — VI. a.)

Plötz, Conjugaison. (V. b. — V. a.)
——, Schulgrammatik. (IV. b. — I.)
Seinecke, Premières lectures. (IV. a. — IV b.)
——, Secondes lectures. (III.)
——, Troisièmes lectures. (II. I.)

Schule zu Berlin.

Pensa.

Geographie und Geschichte.	Naturkunde.	Rechnen.	Schreiben u. Zeichnen.	Singen.	Handarbeit.
Neuere und vaterländische Geschichte. — Repetitionen. Politische Geographie der fünf Erdtheile Europa. Mathematische Geographie.	Chemie. Wichtigste Erscheinungen der Physik.	Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Repetitionen. Ausmessung von Linien, Flächen, Körpern.	Zeichnen von Köpfen, Landschaften, Blumen.	Zwei- und dreistimmige Choräle. Chöre und Motetten mit Arien und Duetten.	Alle Arten weißer Näherei, Stickerei und anderer Handarbeiten.
Deutsche Geschichte, 1125—1519. Fremdländische Geschichte. Halbinseln Europa's und Deutschland, physisch und politisch.	Im Sommer Botanik. Im Winter Zoologie (Reptilien, Fische, wirbellose Thiere).	Rabatt-, Procent-, Proportions-Rechnung.	Schattiren und perspectivisches Zeichnen.	Zweistimmiger Gesang. Chöre und Motetten mit Sologesang.	Einrichten und Nähen des Hemdes. Zeichnen und Sticken.
Das Mittelalter bis 1125 Vaterländische Geschichte in großen Zügen. Die 4 fremden Erdtheile. Der Stamm Europa's.	Im Sommer Botanik Im Winter Zoologie (Säugethiere, Vögel).	Bruchrechnung. Regeldetri, einfache Zinsrechnung.	Blattformen, Blumen, Gefäße	Zweistimmige Choräle und Motetten, Sologesang.	Nähen, Stricken, Zeichnen, Sticken.
Die Römer, orientalischen Völker und Griechen. Europa's Bodengestalt (Voigt, Cursus 2). Länder und Völkerkunde (Voigt 3, §§. 26—35.)		Gewöhnliche und Decimal-Brüche.	Vorderansichten nach Natur u. Vorlegeblättern. Schreiben: Laquiante 2 und Fracturschreiben.	Treffübungen. Choräle, Lieder und kleine Motetten.	Nähen, Zeichnen, Sticken; auch Tapisserie- und Häkelarbeiten.
Reformation, dreißigjähriger Krieg, Friedrich der Große, Napoleon, Freiheitskriege. Bodengestalt der fremden Erdtheile (Voigt 2).		Regeldetri, Zeitrechnung.	Linien, Winkel, Drei- und Vierecke, architectonische Umrisse. Schreiben: Laquiante 1 und 2.	Noten. Rhythmische Uebungen. Tonleiter. Einstimmiger Gesang.	Zuschneiden. Nähen, Sticken, Stricken, Häkeln, Stopfen.
Biographieen aus der mittleren und neueren Geschichte. Land- und Wasservertheilung (Voigt 1).		Addition, Subtraction, Multiplication, Division von mehrsortigen benannten Zahlen.	Schreiben: Laquiante 2.	Noten. Tonbildung. Tactübung. Einstimmiger Gesang.	Der vollständige Strumpf. Näh- und Häkelarbeiten.
Biographieen aus der alten Geschichte. Globus, Erdtheile, Oceane. Europa. Preußen in horizontaler Beziehung.		Division. Reduciren, Resolviren.	Laquiante 2. Current- und Cursivschrift.		Säumen, Häkeln, Stricken.
Orientir-Uebungen, Heimathskunde.		Addition, Subtraction, Multiplication im unbegrenzten Zahlenkreise.	Laquiante 1. Das deutsche und lateinische Alphabet.		Stricken und Nähen.
		Addition, Subtraction, Multiplication Division (100—1000.)	Laquiante 1. Das deutsche und lateinische Alphabet.		Stricken und Häkeln.
		Die vier Operationen. (1—100.)	Laquiante 1. Das deutsche Alphabet; die kleinen lateinischen Buchstaben.		Stricken in rechts und links.

der Lehrbücher.

Plate, Lehrgang der engl. Sprache 1. (III.—II.)
Fölsing, Lehrbuch der engl. Sprache. (I.)
Französische Classiker. (I.)
Englische Classiker. (I.)
Wernicke, Leitfaden für den biographischen Unterricht. (V. b.—IV. b.)

Wernicke, Lehrbuch der Weltgeschichte. (IV. a.—I.)
Voigt, Leitfaden beim geographischen Unterricht. (V. a.—I.)
v. Sydow, Schulatlas. (IV. b.—I.)
Laquiante, Schreibschule 1. (VII. a.—VI. a.)
——, Schreibschule 2. (V. b.—IV. a.)

Böhme, Rechenhefte 1.—7. (VII. a.—I.)
Koch, Tabelle der neuen Maaße. (III.—I.)
Hahn, 73 Choräle. (IV. b.—I.)
Klenholz u. Lindemann, Liederhain. (V. a.—I.)

Real-

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer

Laufende Numer.	Rangordnung.	Name.	Ordinarius in	I.	II. A.	II. B. 1.
1.	Director.	Dr. theol. **Ranke.**		2 Religion		
2.	Prorector und 1. Oberlehrer.	Professor Dr. **Strack.**		3 Deutsch 3 Latein		
3.	2. Oberlehrer.	Professor Dr. **Hubert.**	I.	5 Mathem. 2 Mechanik	5 Mathem.	5 Mathem.
4.	3. desgl.	Professor **Heller.**	II. A.	4 Französ.	4 Latein 4 Französ.	4 Französ.
5.	5. desgl.	Dr. **Tillich.** (Vertreten durch Cand. Muthreich.)				
6.	6. desgl.	Dr. **Voigt.**	II. B. 1. und II. B. 2.	3 Gesch. und Geographie	3 Gesch. und Geographie	3 Gesch. und Geographie 3 Deutsch 4 Latein
7.	7. desgl.	**Zauritz.**	III. A. 2.	3 Englisch	3 Englisch	
8.	8. desgl.	Dr. **Schwalbe.**		2 Physik 2 Chemie 4 Laborat. in 2 Abtheil.	2 Physik 2 Chemie 2 Naturg.	2 Physik 2 Chemie
9.	1. ordentlicher Lehrer.	Dr. **Ohrtmann.**				
10.	2. desgl.	**Schubart.**	III. A. 1.			
11.	3. desgl.	Dr. **Meyer.**	III. B. 2.		3 Deutsch	
12.	4. desgl.	Dr. **Hohenberg.**	V. 1.			
13.	5. desgl.	Dr. **Löw.**	IV. 2.			2 Naturg.
14.	6. desgl.	Dr. **Dressel.**	IV. 1.			
15.	7. desgl.	Dr. **Müller.**				
16.	8. desgl.	Dr. **Freytag.**				3 Englisch
17.	Vorletzter ordentl. Lehrer und Turnlehrer.	**Kawerau.**	III. B. 1.		2 Religion	2 Religion
18.	Letzter ordentl. Lehrer.	**Fiege.**	V. 2.			
19.	1. wissenschaftl. Hülfslehrer.	**Grossmann.**	VI. 2.			
20.	2. desgl.	**Berent.**	VI. 1.			
21.	Technischer Hülfslehrer.	Maler **Ludwig.**		3 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen
22.	desgl.	Maler **Krause.**				
23.	desgl.	Schreiblehrer **Köhler.**				
24.	desgl.	Gesanglehrer **Colberg,** seit Neujahr **Preiss.**				Gesang
			Summa	34	32	32
						ohne die Ge-

Schule.

im Winter-Semester 1871 bis 1872.

II. B. 2.	III. A. 1.	III. A. 2.	III. B. 1.	III. B. 2.	IV. 1.	IV. 2.	V. 1.	V. 2.	VI. 1.	VI. 2.	Summa.
											2
						6 Latein					12
											17
4 Französ.											20
5 Mathem.	6 Mathem.						4 Rechnen			5 Rechnen	20
3 Gesch. und Geographie 4 Latein											23
		4 Französ. 4 Englisch					3 Geogr.	3 Geogr.			20
2 Physik 2 Chemie	4 Englisch										26
		6 Mathem.		6 Mathem.		3 Deutsch			5 Rechnen		20
	5 Latein 4 Gesch. und Geographie	5 Latein 4 Gesch. und Geographie							4 Deutsch		22
				4 Französ. 5 Latein 4 Gesch.					3 Geogr.	3 Geogr.	22
	3 Deutsch					4 Gesch. und Geographie	6 Latein 4 Deutsch 5 Französ.				22
2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg.	6 Mathem. 2 Naturg.					22
			4 Französ.	4 Englisch	2 Religion 6 Latein 3 Deutsch				3 Religion		22
		3 Deutsch	6 Mathem.		6 Mathem.			4 Deutsch 4 Rechnen			23
3 Englisch	4 Französ.		4 Gesch. und Geographie 4 Englisch		4 Gesch. und Geographie						22
2 Religion	2 Religion	2 Religion	2 Religion 3 Deutsch 5 Latein			2 Religion					22
						5 Französ.	3 Religion	3 Religion 6 Latein 5 Französ.			22
				2 Religion	5 Französ.					3 Religion 4 Deutsch 8 Latein	22
3 Deutsch				3 Deutsch			2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg. 8 Latein	2 Naturg.	22
2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen							17
					2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	12
					2 Schreiben	2 Schreiben	2 Schreiben	2 Schreiben	3 Schreiben	3 Schreiben	14
6 Stunden.					2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	18
32	32	32	32	32	34	34	33	33	32	32	464

sangstunden.

Vorschule.

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer im Winter-Semester 1871 bis 1872.

Laufende No.	Rang-ordnung.	Name.	Ordinar.	I. A.	I. B.	II. A.	II. B.	III. A.	III. B.	IV. A.	IV. B.	V. A.	V. B.	Summa.
1.	Oberlehrer u. Directorial-Gehülfe	Dr. **Schnell.**		3 Relig. 9 Deutsch										12
2.	Ordentlicher Lehrer	**Möllinger.**	I. A.	3 Geogr. 2 Zeichnen 4 Schreib.	3 Geogr. 1 Deutsch	2 Zeichnen	2 Zeichnen					3 Relig. 2 Sprech-Uebung.		22
3.	desgl.	**Schmidt.**	I. B.		3 Relig. 8 Deutsch 5 Rechn. 4 Schrb. 2 Zeichnen									22
4.	desgl.	**Streithorst.**	V. A.	5 Rechn.								7 Lesen. 6 Rechn. 6 Schreib.		24
5.	desgl.	**Lübcky.**	II. A.			3 Relig. 9 Dtsch. 6 Rechn. 2 Geogr. 4 Schreib.								24
6.	desgl.	Dr. **Dallwitz.**	IV. A.							3 Relig. 9 Deutsch 2 Sprech-Uebung. 6 Rechn. 4 Schreib.				24
7.	desgl.	**Pache.**	II. B.				3 Relig. 9 Dtsch. 6 Rechn. 2 Geogr. 4 Schreib.							24
8.	desgl.	**Löben.**	III. A.					3 Relig. 9 Deutsch 6 Rechn. 2 Geogr. 4 Schreib.						24
9.	desgl.	**Arndt.**	III. B.						3 Relig. 9 Dtsch. 6 Rechn. 2 Geogr. 4 Schreib.					24
10.	desgl.	**Schiller.**	V. B.										3 Relig. 7 Lesen 2 Sprech-Uebung. 6 Rechn. 6 Schreib.	24
11.	desgl.	**Werdermann.**	IV. B.								3 Relig. 9 Deutsch 2 Sprech-Uebung. 6 Rechn. 4 Schreib.			24
12.	Technischer Lehrer	Prof. **Commer.**		2 Gesang	2 Gesang									4
		Summa		28	28	26	26	24	24	24	24	24	24	252

Elisabethschule.

Vertheilung der Stunden unter die Lehrer im Winter-Semester 1871 bis 1872.

Laufende No.	Rangordnung.	Name.	Ordin.	I.	II.	III.	Ober-IV.	Unter-IV.	Ober-V.	Unter-V.	Ober-VI.	Unter-VI.	Ober-VII.	Unter-VII.	Summa.
1.	Director	Dr. **Ranke**.		2 Relig.											2
2.	Professor	Dr. **Schönermark**	I.	3 Dtsch. 2 Literat. 4 Franz. 3 Engl.	2 Relig.										14
3.	Oberlehrer	Dr. **Bornhak**.	II.	3 Gesch. 1 Geogr.	4 Dtsch. 2 Gesch. 2 Geogr.	2 Gesch. 2 Geogr.	2 Gesch. 2 Geogr.								20
4.	desgl.	Dr. **Bachmann**.	III.	2 Rechn. 2 Phys.	4 Franz. 2 Rechn. 2 Naturg.	4 Dtsch. 2 Rechn. 2 Naturg.									20
5.	Ordentl. Lehrer	**Laquiante**.	Ober-IV.			5 Franz.	5 Franz. 5 Dtsch. 2 Rechn. 2 Schrb.		3 Schrb.						22
6.	desgl.	**Warlitz**.	Unter-IV.					3 Relig. 5 Dtsch. 2 Gesch. 2 Geogr. 2 Rechn. 2 Schrb.	2 Gesch. 2 Geogr. 2 Rechn.						22
7.	desgl.	**Griese**.	Ober-V.						3 Relig. 5 Dtsch. 5 Franz.	5 Franz.		4 Schrb.			22
8.	desgl.	**Wetzel**.	Unter-V.							3 Relig. 6 Dtsch. 2 Gesch. 2 Geogr. 3 Rechn. 2 Schrb.	4 Franz.				22
9.	desgl.	**Plath**.	Ober-VI.								3 Relig. 6 Dtsch. 4 Rechn. 2 Heim.-Kunde. 3 Schrb.	4 Franz.			22
10.	desgl.	**Böttcher**.	Unter-VI.									3 Relig. 7 Dtsch. 4 Rechn.	5 Schrb.	5 Rechn.	24
11.	Ordentliche Lehrerin	Fräul. **Heinecke**.						4 Hdarb.	4 Hdarb.		4 Hdarb.	4 Hdarb.			16
12.	desgl.	Fräul. **Walter**.			3 Engl.	3 Engl.				4 Hdarb.			3 Relig.	3 Relig. 4 Hdarb.	20
13.	desgl.	Frl. **Herrmann**.	Ober-VII.	4 Hdarb.	4 Hdarb.	4 Hdarb. (combinirt)	4 Hdarb.	5 Franz.					7 Dtsch. 4 Hdarb.		20
14.	desgl.	Fräul. **Schick**	Unter-VII.			2 Relig.	2 Relig.						5 Rechn.	7 Lesen. 5 Schrb.	21
15.	Techn. Lehrer	Professor **Commer**.		2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang						12
16.	desgl.	Zeichenlehrer **Schmidt**.		2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.							10
		Summa		30	29	30	28	29	28	27	26	26	24	24	289

Schulnachrichten.

Von Ostern 1871 bis Ostern 1872.

A. Allgemeine Lehrverfassung.

Realschule.

Da die Pensa der einzelnen Klassen, die Namen der Lehrer, ihre Rangstufen, die Ordinariate und die Vertheilung der Stunden unter die Lehrer sich aus den vorstehenden Tabellen und aus der „Chronik" ergeben, theilen wir hier nur noch die in den oberen Klassen der Realschule bearbeiteten Themata vorschriftmäßig mit.

Prima.

a) Themata zu den deutschen Aufsätzen, Dispositionen und Vorträgen: Ursachen und Folgen der punischen Kriege. — Mein Lebenslauf. — Hergang in Schiller's Tell. — Ein beliebiges Thema. — Trau, schau, wem? — Die Physik und das tägliche Leben (Abiturienten-Arbeit). — Die Dampfmaschine. — Die Macht der Gewohnheit (Abiturienten-Arbeit). — Nicht Roß, noch Reisige schützen die steile Höh', wo Fürsten stehn 2c. — Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr. — Was geht mich das Urtheil anderer Leute an? — Wer giebt, empfängt. — Willst Du immer weiter schweifen? Sieh, das Gute liegt so nah! Lerne nur das Glück ergreifen, denn das Glück ist immer da! — Der Prolog zur „Jungfrau von Orleans". — Der Wallfahrtsort Hurdowa. — Vom Tschadsee bis zum Golf von Guinea. — Die Vulkane. — A. Graf von Platen. — Egmont bei Goethe. — Der fränkische Kaiser Conrad II. — Der Festungskrieg. — Erhebung und Senkung der Erdoberfläche. — Die Wunder der Natur. — A. von Humboldt. — Otto I. — Die deutsche Sprache. — Muhammed und der Koran. — Hergang in Schiller's Maria Stuart. — Das Kochsalz. — Der Nil. — Die Pflanzenwanderung. — Thor's Fahrt zu den Riesen. — Shakespeare's Heinrich V. — Varnhagen von Ense. — Der Ernst als Weg zur Wahrheit. — Geschichte des Königl. Schlosses zu Berlin. — Cromwell. — Macbeth. — Der deutsche Orden. — Spanien's Verfall. — Chlodwig. — Geschichte der Briefe. — Der Bauernkrieg. — Schiller's Leben. — Der Fall Venedig's. — Johanna von Orleans. — Richelieu. — Der Mond und seine Bewohner. — Geschichte der Dampfmaschine. — Die catilinarische Verschwörung. — Wie Straßburg an Frankreich kam. — Wilhelm Rabe. — Die Dnjepr-Kosaken. — Die wichtigsten Nahrungspflanzen. — Das Gold in Californien. — b) Themata zu den französischen Aufsätzen: Guerre de l'indépendance de l'Allemagne. — Henri IV. — La maison de Souabe. — Frédéric II. — Comment la monarchie des Francs fut-elle fondée et agrandie? — Frédéric Barberousse. — Guerre de la succession d'Espagne. — Charles I., roi d'Angleterre. — La réformation religieuse en Angleterre. — Réformation en France. — Elisabeth, reine d'Angleterre. — Cromwell et la révolution en Angleterre. — Guerres de religion en France. — Les ordres de chevalerie. — Auguste. — Abiturienten-Aufsätze, Michaelis 1871: Quels sont les événements qui ont amené les croisades, particulièrement la première? zu Ostern 1872: Guerre du Nord et avantages que la Prusse en a retirés. — c) Themata zu den englischen Aufsätzen: Henry I., Emperor of Germany. — The kingdom of Judea. — The Peloponnese war. — The elevation of Prussia to kingdom. — The Trojan war. — The Normans in Italy. — Henry the First. — Henry the Fourth and Gregory the Seventh. — Frederick the Second and Innocence the Third.

Ober-Secunda.

Themata der deutschen Aufsätze: Geld verloren — Viel verloren, Ehr' verloren — Mehr verloren, Muth verloren — Alles verloren. — Die Segnungen und die Gefahren des Friedens. — Aus meinen Ferien. — Selbstbewußtsein, Stolz, Hochmuth. — Kann Columbus ein großer Mann genannt werden? — Uebersicht der römischen Geschichte. — Was heißt arbeiten? — Gespräch einiger Soldaten Hannibal's beim Uebergang über die Alpen. — Welche von den Erfindungen unseres Jahrhunderts ist die bedeutendste? — Der Grundgedanke des Götz von Berlichingen. — Wodurch ist die Entdeckung Amerika's so bedeutungsvoll geworden?

Unter-Secunda, Coetus I.

Themata der deutschen Aufsätze: Jeder ist seines Glückes Schmied. — Ueber das Wetter. — Das Papier. — Die erste Scene aus der Jungfrau von Orleans. — Was ich werden möchte. — Licht- und Schattenseiten großer Städte. — Luft- und Meeresströmungen. — Ueber die Entdeckungen der Portugiesen. — Der Handel. — Graf Leicester (nach Schiller). — Schlacht bei Pharsalus (nach Caesar). — Berlin wird Weltstadt.

Unter-Secunda, Coetus II.

Themata der deutschen Aufsätze: Die Glocke. — Mit dem Hut in der Hand kommt man durchs ganze Land. — Leidenschaften sind die Winde, die unser Lebensschiff treiben, Vernunft der Steuermann, der es lenkt. — Was ein Häkchen werden will, krümmt sich bei Zeiten. — Ferien-Erlebnisse. — Das Eleusische Fest. — Der Staatsrath der Elisabeth. — Ein Mann ein Wort. — Charakter des Paulet. — Der Hund. — Die Schlacht am Lech. — Jeder ist seines Glückes Schmied.

Der Turn-Unterricht,

an welchem im Sommer 488 und im Winter 138 Schüler theilnahmen, wurde ganz in der bisherigen Weise ertheilt. Die Prüfungen der Zugführer und Vorturner („Wett-Turnen") wurden am 16. August und am 6. September abgehalten, und zwar betheiligten sich 79 Schüler an denselben. Bei dem am 20. September veranstalteten Schlußturnen erhielten die Medaille die Zugführer Paul Wonnberger, Jean Fasquel und Max Baltzer. Den Unterricht ertheilten, unter Oberleitung des Herrn Kawerau, die Oberlehrer Dr. Voigt und Turnlehrer Günther.

Erste Gesang-Klasse.

Die gesangfähigen Schüler der Klassen Prima bis Unter-Tertia wurden wie früher im Verein mit einzelnen Schülern der untern Klassen im Vortrage von mehrstimmigen Chorälen, Motetten, Psalmen und Volksliedern geübt, wöchentlich je eine Stunde für jede der vier Stimmen, und je zwei Stunden für den ganzen Chor; bis Weihnacht Herr Colberg, von Neujahr an Herr Preiß.

B. Chronik.

1. Das Sommer-Semester wurde in den vereinigten Anstalten am 17. April, das Winter-Halbjahr am 16. October v. J. eröffnet.

2. **Veränderungen im Lehrer-Collegium.**

a) **An der Realschule.** So glücklich das Schuljahr, seit längerer Zeit zum ersten Male, mit einem ganz vollständigen Lehrer-Collegium begann, so traurig schließt es für uns ab. Im Juni v. J. verschlimmerte sich ein Halsübel, mit welchem der Oberlehrer Dr. Ernst Tillich bereits wiederholt zu kämpfen gehabt hatte, dergestalt, daß er eine Kur in Salzbrunn gebrauchen und, hierher zurückgekehrt, sich erst für den Rest des Sommers, dann aber auch für das ganze Winter-Semester beurlauben lassen mußte. Zu unsrem innigen Bedauern jedoch erweist das Leiden sich als so hartnäckig, daß gewissenhafteste Schonung, gepaart mit einsichtigster ärztlicher Behandlung, dasselbe zu beseitigen nicht vermocht haben und unser lieber College durch sein Gewissen sich gedrängt fühlt auf das ihm theure Schulamt zu verzichten. Wir danken ihm für die Treue, die er der Schule und dem Collegium während seiner achtjährigen Wirksamkeit an unserer Anstalt stets bewährt hat, aufs herzlichste und begleiten ihn auf seinem ferneren Lebenswege mit den innigsten Wünschen für seine Genesung und seine innere Befriedigung.

Zu Michaelis schied von uns der erste ordentliche Lehrer, Hr. Dr. Wilhelm Zenker. Seit längerer Zeit mit wissenschaftlichen und praktischen Untersuchungen über die Natur und die Wirkungen des

Lichtes beschäftigt und durch Erfolge erfreut, die in früheren Programmen gebührend hervorgehoben worden sind, glaubte er diesen Studien, die Unterbrechungen nicht leiden, sein Schulamt opfern zu müssen und zog sich deshalb ins Privatleben zurück. Das ganze Collegium hat den liebenswürdigen und stets gefälligen Collegen sehr ungern scheiden sehen und begleitet sein Leben wie seine Untersuchungen mit regster Theilnahme. — Am 20. December entließen wir mit herzlichsten Segenswünschen den vierten Oberlehrer, Hrn. Friedrich Schneider. Seit Michaelis 1841 an der Anstalt zunächst als Hülfslehrer beschäftigt und dann fest angestellt, hat er dreißig Jahre lang an der Königl. Realschule vornehmlich das Englische vertreten, jedoch auch anderen Unterricht ertheilt, hauptsächlich, seinen früheren Studien entsprechend, Religion. Charakteristisch ist für ihn von je gewesen und bis ans Ende geblieben die Treue seiner Hingabe an Amt und Schüler, die ihn körperliche Schwächen und Schmerzen überwinden ließ und allen Nöthen und Entbehrungen Trotz bot. Selbst das lange und schwere Siechthum seines beim Lazaretdienst im Kriege gegen Frankreich erkrankten einzigen Sohnes vermochte nicht ihn an Erfüllung seiner Pflichten zu verhindern, und erst der Tod dieses braven, hoffnungsvollen Jünglings knickte den Muth und die Kraft des schwergeprüften Vaters. Wohl war ihm daher die Ruhe zu gönnen, um die er die Behörden bat und deren ungetrübten Genuß für noch recht lange Zeit wir ihm von ganzem Herzen wünschen. — Noch schmerzlicher für uns, weil durch den Tod herbeigeführt, war der Verlust, den wir zwei Tage später erlitten, als unser lieber Freund und College, der Gesanglehrer Colberg, am 22. December ganz plötzlich starb.

Carl Friedrich Franz Colberg war zu Berlin am 1. October 1822 geboren, der Sohn eines hiesigen Kaufmanns. Seine Schulbildung empfing er in der Realschule; Michaelis 1838 verließ er sie als Ober-Tertianer, um in eine hiesige Seidenwaarenhandlung (Baudouin) einzutreten, wo er drei Jahr Lehrling, ein halbes Jahr, bis Ostern 1843, Commis war und sich durch unverdrossene Thätigkeit, Redlichkeit, Rechtschaffenheit und Zuverlässigkeit sehr empfahl. Jetzt beschloß er sich zum Sänger auszubilden und wählte sich vier Musik-Directoren, Schneider und Hase, Prof. Le Cerf und Kapellmeister Otto Nicolai, zu Lehrern. Schon 1846 versuchte er auf dem Theater in Halle aufzutreten, gewann zwar großen Beifall, erkannte aber, daß er in dieser Laufbahn keine Befriedigung finden werde, und kehrte in die Heimat zurück. Sogleich trat er in den emporblühenden Domchor ein, in welchem er schon seit 1843 thätig gewesen war, und blieb demselben bis zum Lebensende treu. Hier nährte er seinen frommen, religiösen Sinn, fand seine Freude daran mit seinem Talent der Kirche zu dienen und wandte sich bald auch dem Berufe eines Gesanglehrers zu. In mehreren Privatschulen fand er zuerst die gewünschte Gelegenheit für seinen Lebenszweck zu wirken und erntete überall durch seine persönliche Haltung, seinen anregenden Umgang mit der Jugend und seinen erfolgreichen Unterricht den entschiedensten Beifall. Schon im Jahre 1848 verheiratete er sich. Als der zweite Gesanglehrer der Realschule, Dr. Angermann, erkrankte, vertrat er zuerst dessen Stelle in Sexta, Quinta und Quarta, und nach dessen Tode, 1. October 1855, wurde er sein Nachfolger. In diesem Elementar-Unterricht leistete er Vortreffliches und seine Disciplin war vorzüglich, sein Unterricht belebend; es gelang ihm die Kinder zu reinem, schönem Gesang zu führen, ihre Stimmbildung zu fördern, sie mit Lust und Liebe zu erfüllen. Wo er bei Prüfungen und öffentlichen Festlichkeiten der Schule mit ihnen auftrat, erfreute und erbaute er die Anwesenden. Auch in der Augustaschule, in den Privatschulen des Schulvorstehers Senz wie der Frau Dr. Burtin u. a. leitete er mit gleichem Erfolge den Gesang-Unterricht in allen Klassen. Als der Hr. Oberlehrer Fischer, der erste Gesanglehrer, starb, übernahm er 1. Januar 1864 dessen Stellung und setzte seitdem seine ganze Persönlichkeit für die Zwecke des Gesang-Unterrichts mit dem glänzendsten Erfolge ein. Choral und Volkslied gediehen gleichmäßig; er wählte die Gesangstücke mit Rücksicht auf Geist und Herz der Jugend, zeigte, wie viel daran liegt, daß der Lehrer durch eigenes Singen das Vorbild seiner Zöglinge wird, ermüdete nicht den Elementen in Theorie und Praxis seine volle Kraft zuzuwenden, wies jedem seiner Schüler die rechte Stelle an, wo er am meisten leisten konnte, und machte die Festigkeit derselben zur Hauptstütze seines Unterrichts. Alljährlich veranstaltete er größere Aufführungen für Gesang und Musik, für die er einen großen Vorrath schon immer in Bereitschaft hatte, und erntete stets die verdiente Anerkennung. Dabei war er gegen alle Menschen freundlich und liebenswürdig, seinen Collegen gegenüber gefällig und dienstfertig, allem Zwist und Streit fremd und unzugänglich, stets bescheiden und selbstlos. Sein ganzes häusliches und weltliches Leben hat ihn Allen, mit denen er in Berührung kam, lieb und werth gemacht.

Ganz unerwartet trat in den letzten Wochen des Jahres ein Unwohlsein ein, welches seine Familie veranlaßte um einen kurzen Urlaub für ihn zu bitten. Als die Folgen schon gehoben zu sein schienen, erfolgte ein ernster Unterleibskrampf, und als auch dieser beseitigt schien, erkrankte er an einer gefährlichen Bauchfell-Entzündung, die sehr schnell seinen Tod herbeiführte. Er starb in der Nacht vom 21. zum 22. December, nachdem er von allen den Seinen Abschied genommen und seine Frau und drei Kinder gesegnet hatte, blieb bis zuletzt bei vollem Bewußtsein und entschlief sanft unter den Thränen der Seinen. — Sein Andenken bei uns wird stets ein gesegnetes sein.

Zum Ersatz für die Genannten haben bisher bei uns gewirkt die Herren Schulamts-Candidaten Carl Muthreich, Friedrich Großmann und Gustav Berent; die Stelle Colberg's hat seit Neujahr mit voller Kraft vertreten der Königl. Domsänger Herr Carl Preiß. Nur ihrer Treue und der Geschicklichkeit, mit welcher sie sich in die ihnen fremden Verhältnisse und Bedürfnisse unserer großen An-

stalt zu finden wußten, verdanken wir es, daß die Realschule durch so viele und so große Verluste nicht ernstlich erschüttert worden ist. — Ihr Probejahr begannen in der Anstalt die Candidaten Wilhelm Köhler und Otto Hubert, von denen ersterer jedoch schon zu Neujahr an das Gymnasium in Bromberg berufen worden ist.

b) **An der Elisabethschule.** Mit dem Schluß des Wintersemesters, 1. April 1871, trat der Professor Dr. Wernicke auf seinen Antrag in den Ruhestand, nachdem er 35 Jahre hindurch der Anstalt in Liebe und Treue seine Dienste gewidmet hatte.

Carl August Theodor Wernicke, geb. zu Berlin am 16. Sept. 1813, besuchte das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium und die Universität zu Berlin, studirte Theologie und unterwarf sich am 28. Febr. 1834 der Prüfung pro schola. Nachdem er zwei Jahre als erster Lehrer an der höheren Knabenschule in Driesen beschäftigt gewesen war, ging er Ostern 1836 zu der Elisabethschule über, wurde 1847 Oberlehrer, unterrichtete in Religion, Deutsch, Rechnen, Geschichte und Geographie und blieb der Anstalt treu, bis wachsende Kränklichkeit ihn zwang in den Privatstand zurückzutreten. In der Schule zeichnete er sich durch Pünktlichkeit und Gewissenhaftigkeit aus, lebte mit allen Collegen in vollster Eintracht und Uebereinstimmung, wirkte kräftig für gute Ordnung und Disciplin, rief durch die Lebendigkeit seines Wesens gute Fortschritte seiner Schülerinnen hervor, gewann durch die Tüchtigkeit seines Unterrichts und durch sein mildes freundliches Wesen Achtung und Liebe und war so ein sehr eifriges Mitglied des Lehrer-Collegiums. Auch als Schriftsteller war er thätig und dehnte dadurch den Kreis seiner Wirksamkeit weit über die Grenzen unserer Schule aus. Sein „Lehrbuch der Weltgeschichte für höhere Töchterschulen" hat seit 1849 eine große Reihe von Auflagen erlebt. Seine „Geschichte der Welt" ist seit 1850 in vier Bänden gedruckt und oft wiederholt worden. Endlich hat auch sein Leitfaden für den vorbereitenden Geschichts-Unterricht viel Beifall und Verbreitung gefunden. Wir sind ihm immer Dankbarkeit schuldig und werden sein Andenken stets in Ehren halten. —

Da sofort einen Ersatz zu beschaffen nicht möglich war, so fand mit Genehmigung der Behörde im Sommer eine Vertretung der Lehrobjecte des geschiedenen Amtsgenossen durch Lehrerinnen des Collegiums sowie durch den Schulamts-Candidaten Herrn Felix Bachmann, welcher schon mehrfach an der Anstalt erfolgreich gewirkt hatte, statt. Beim Beginn des Wintersemesters trat sodann der von den Hohen Königlichen Behörden zum Nachfolger des Prof. Wernicke ernannte Herr Oberlehrer Dr. Bornhak, bis dahin an der Realschule zu Nordhausen thätig, in das Collegium ein und wurde am 16. Oktober 1871 von dem Director feierlich in sein neues Amt eingeführt. Er übernahm das Ordinariat der Klasse II. Seine bisherige Wirksamkeit an der Elisabethschule berechtigt zu den erfreulichsten Hoffnungen. Ueber seinen Lebenslauf berichtet er selbst mit folgenden Worten: Gustav Adolf Emanuel Bornhak, geboren am 30. Januar 1828, besuchte die lateinische Hauptschule des Waisenhauses zu Halle a. S., studirte daselbst nach abgelegtem Maturitäts-Examen klassische Philologie, deutsche Litteratur und Geschichte und trat, nachdem er das Examen pro facultate docendi bestanden, das Probejahr an dem Königlichen und Stadtgymnasium zu Cöslin an. Nach Beendigung desselben folgte er, nachdem er zuvor am 30. Juli 1857 mit der Dissertation „de graecae linguae heteroclitis et metaplastis vocabulis" promovirt hatte, einem Rufe als Collaborator und Erzieher an die lateinische Hauptschule zu Halle, welchem Amte er bis Michaelis 1859 vorstand. Hierauf übernahm er die Stelle eines ordentlichen Lehrers an der neu gegründeten höheren Bürgerschule zu Hagen, welche er Michaelis 1860 mit einer gleichen an der Realschule zu Nordhausen vertauschte. Diese Stelle hatte er bis Michaelis 1871 inne, worauf er einem Rufe an die Königliche Elisabethschule zu Berlin folgte.

c) **An der Vorschule** sind Veränderungen im Lehrer-Collegium nicht eingetreten.

3. **Schul-Feierlichkeiten.** Am 25. März v. J. veranstaltete unser verstorbener College Colberg eine Musikaufführung zur Nachfeier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs, deren Ertrag mit 25 Thlr. 25 Sgr. dem Central-Comité für verwundete Krieger übergeben wurde. — Die Vorfeier der Rückkehr unserer siegreichen Truppen wurde am 15. Juni nach folgendem Programm begangen: Gemeinsamer Gesang mit Orgelbegleitung „Allein Gott in der Höh' sei Ehr"; Grell's Motette „Hallelujah, lobet den Herrn" vom großen Chor unter Hrn. Colberg's Leitung; Ansprache des Directors „Ueber die Herrlichkeit des Sieges und den Segen des wiederhergestellten Friedens"; Chor aus Romberg's „Glocke" über den Frieden, und Händl's „Seht, da kommt mit Preis gekrönt", vom großen Chor unter Hrn. Colberg's Direction; Festrede des Prorectors über das Thema: „Ihr seid die Rekruten des Kaisers". Nach Schluß derselben übergab der Prorector dem Primus omnium Carl Schwarz, dem Ober-Secundaner Jean Fasquel und den Unter-Secundanern Hermann Noack und Waldemar Kulinowsky die von der Stadt gespendeten Bücher und aus eigenen Mitteln, als Anerkennung und zur Aufmunterung, Erinnerungs-Medaillen in Etuis den Sextanern Bastian, Buchholz, Budeweg und Caplick, den Quintanern Frick, Oehme, Mehlitz und Wolden, den Quartanern Caplick, Haslinger, Lawendel und Wünsche, den Unter-Tertianern Fasquel, Krzysika, Franz Müller und Georg Schüler, den Ober-Tertianern Knippenberg, Petsch, Seiler und Voigt und den Unter-Secundanern Firgau, Seidel, Triebler und Tuchnitz. Den Schluß der Feier bildete der gemeinsame Gesang des ersten Verses von „Heil Dir im Siegerkranz", den College

Kawerau auf der Orgel begleitete. — Zum Einzuge selbst hatten 40 Schüler und 4 Lehrer Billets zur Tribüne auf dem Ascanischen Platze erhalten. — An der **Vorschule** hielt die Festrede Oberlehrer Dr. Schnell. — Aehnlich feierten wir am 2. September den Jahrestag der Schlacht bei Sedan. — Am 2. November hielt zur Feier des Reformationsfestes die eigentliche Festrede College Dr. Löw „Ueber Luther's politischen Einfluß", welcher zwei kürzere Ansprachen der Ober-Primaner Ernst Wonnberger und Emil Usbeck über Luther und Apostel Paulus folgten. Ersterer erhielt die Denkmünze des Magistrats, Letzterer aus dem Ritter'schen Legate „Gellert's geistliche Lieder". Der Bibelschatz der Anstalt wurde durch Hinzufügung von 12 neuen Exemplaren vollkommen abgerundet. Die von Hrn. Hofbuchhändler Alexander Duncker freundlichst geschenkten zehn Kupferstiche nach Kaulbach's Zeitalter der Reformation waren zu spät eingegangen und wurden daher erst zu Weihnacht vergeben und zwar an die Primaner Max Schwarz, Mantey, Fasquel und Limann, an die Ober-Secundaner Koppe und Atzrott und an die Unter-Secundaner Braun, Gelpcke, Haslinger und Scharffenstein. — Am 18. Januar d. J. begingen wir die Jahresfeier der Proclamation des deutschen Reiches mit einer Festrede des Prorectors, nach welcher C. v. Dachroeden's „Wilhelm der Siegreiche", componirt von Edwin Schultz, unter Leitung des Gesanglehrers Hrn. Preiß zum ersten Male vierstimmig vom großen Chore vorgetragen wurde. — Am 30. desselben Monats veranstaltete der Director eine Todtenfeier zum Andenken an den verstorbenen Gesanglehrer Colberg, welcher die Angehörigen desselben beiwohnten. Der Chor leitete dieselbe ein durch den Vortrag des Mendelssohn'schen Liedes: „Es ist bestimmt in Gottes Rath", und der Gesanglehrer Hr. Preiß schmückte sie durch die Arie „Sei getreu bis in den Tod", die Hr. Kawerau auf der Orgel begleitete. — Den Geburtstag Sr. Maj. des Kaisers und Königs werden wir am 22. März in üblicher Weise feiern.

Die **Elisabethschule** feierte die hervorragenden Momente des letzten siebenmonatlichen Kriegs- und Siegeszuges unsers Heeres in mehr stiller, aber innerlich erhebender und theilnahmevoller Weise; auch bethätigte sie ihren Patriotismus durch Geldsammlungen und Anfertigung von Bekleidungsstücken für die Verwundeten sowie durch Unterstützungen an die Familien im Felde stehender Berliner Lehrer. In besonders freudiger und dankvoller Stimmung beging sie am 22. März 1871 den Geburtstag Sr. Majestät des Kaisers und Königs, an welchem Professor Dr. Schönermark in der Festrede eine Uebersicht über die historische Vergangenheit des Elsasses mit specieller Hervorhebung der reichen deutschen Culturmomente seiner Geschichte gab. — Freitag, 5. Mai 1871, erfreute Ihre Majestät die Königin-Witwe als Hohe Protectorin der Elisabethschule letztere mit einem mehrstündigen Besuche, bei welchem die Hohe Frau mit herzlicher und eingehender Theilnahme dem Unterrichte der einzelnen Klassen zu folgen geruhte. — Donnerstag, 15. Juni, am festlichen Tage der höheren Orts angeordneten Vorfeier der Schulen zum Einzug unserer siegreichen Truppen, fand nach kurzen Ansprachen des Oberlehrers Dr. Bachmann und des Prof. Dr. Schönermark von Seiten der Schülerinnen eine erhebende Feier durch den Vortrag bezüglicher patriotischer Lieder und Gedichte statt. — Am 28. Juni veranstaltete Professor Commer eine mit Declamationen verbundene Gesang-Aufführung, welcher die besonders eingeladene Zuhörerschaft reichen Beifall zollte. — Sonnabend, 18. November, wurde in einer festlichen Vorfeier der Namenstag Ihrer Majestät der Königin-Witwe durch eine Festrede des Oberlehrers Dr. Bornhak sowie durch Festgesänge und bezügliche Vorträge der Schülerinnen in gebührender und herkömmlicher Weise ausgezeichnet.

Die Gesundheitsverhältnisse der Schülerinnen der Elisabethschule waren im Allgemeinen nicht ungünstiger Art, wenn auch für einzelne derselben im Sommer längere Erholungsreisen, im Winter Heimsuchungen durch die herrschenden Krankheiten die Erfolge des Unterrichts beeinträchtigten. — Durch schwere Erkrankungen wurden leider dem Unterricht auf längere Zeit entzogen: Lehrer Laquiante, v. 11.—28. August 1871 und Professor Dr. Schönermark, vom 21. November bis zum Schluß des Jahres. Mit dem neuen Jahre konnte letzterer jedoch seinen Unterricht wieder aufnehmen. Beide wurden bereitwilligst durch das Collegium vertreten, letzterer in anzuerkennender Weise noch durch Frl. Griese, welche einige Stunden in 4A. übernahm.

4. Die **Ferien** haben nach Lage und Dauer ganz den Vorschriften entsprochen. Der Hitze wegen mußten am 14. und 15. August und auch am 5. September die Nachmittagsstunden, und der Volkszählung halber am 1. December sämmtliche Stunden ausfallen.

5. Der **Wittwenkasse** der vereinigten Anstalten ist im vorigen Jahre durch Verfügung des Königlichen Schul-Collegiums der Provinz Brandenburg das Ober-Einnehmer-Witwe-Lehmann'sche Legat, bestehend in einer Schuldverschreibung der consolidirten Staats-Anleihe über 1000 Thlr., à 4½%, überwiesen worden, dessen Zinsen nach den Bestimmungen der Geschenkgeberin die jedesmalige Director-Witwe, in Ermangelung einer solchen die unversorgten minorennen Kinder des Directors und, wenn auch solche nicht vorhanden sind, anderweite Lehrer-Witwen der Realschule event. der übrigen mit derselben vereinigten Schul-Anstalten als Pension erhalten sollen.

Die Kasse besitzt demnach jetzt eine Hypothek von 7000 Thlr., außerdem in Werthpapieren 4700 Thlr. und beim Abschluß des Jahres 1871 einen Baarbestand von 150 Thaler 14 Sgr. 1 Pf., zusammen also 11,850 Thlr. 14 Sgr. 1 Pf.; ihr Vermögen hat sich demnach (incl. des oben genannten Legats von 1000 Thlr.) um 1798 Thlr. 21 Sgr. 9 Pf. vermehrt. Dagegen ist aber auch die Zahl der Witwen

wieder um eine, d. h. auf 13, gestiegen. Von dem Verein der ehemaligen Realschüler ist die statutenmäßig der Kasse zu überweisende Summe für dies Jahr noch nicht festgesetzt worden; wir können derselben aber sicher entgegensehen und werden sie im nächsten Programm dankbar erwähnen.

Auch die abgehenden Zöglinge sind der schönen Sitte treu geblieben, der Anstalt ihre Dankbarkeit durch Liebesgaben an die Witwenkasse zu beweisen. In dieser Weise zahlten im Laufe des Jahres 1871:

15 Thlr.: R. Wentzel;
10 Thlr.: C. Jacoby, G. Erdmann;
$9^1/_2$ Thlr.: M. Schwabe, M. Dettenborn;
5 Thlr.: M. Pfeffer, E. Wipprecht, A. Krüger, J. Jacoby, Ph. Dietz, G. Bolle, C. Schwarz, M. Risse, M. Neander, M. Firgau;
$4^1/_2$ Thlr.: H. Lehmann;
3 Thlr.: R. Große, E. v. Schwartzkoppen, W. Schultze, G. Schwarzmannseder;
2 Thlr.: R. Engeler, E. Gohlicke, H. Mielke, C. Vogt, A. Lagowitz, C. Andrée, M. Schönwetter, F. Winter, C. Kurlbaum, M. Herrmann, L. Henschel, F. Lehmann, F. Gutheins, R. Hartz;
$1^1/_2$ Thlr.: C. Hoyer, M. Conradi;
1 Thlr.: H. Schmidt, A. Gundlach, E. Meyer, M. Meyer, F. Weber, Th. Gennrich, P. Marquardt, O. Pusch, J. Gutzeit, G. Rademeier, P. Rennebarth, A. Löschner, M. Schulze, P. Hennig, J. Sterly, O. Zachert, F. Bahl, F. Hilger, O. Richard, Fr. v. Buddenbrock, C. Geißendörfer, E. Wittenburg, M. Schulze, J. Moral, E. Krause, J. Guerlin, E. Mühlpfordt, O. Stimm, H. Kinkeldey, F. Lechner, G. Hundrich, P. Engel, P. Wonnberger, P. Haschė, H. Heintze, F. Mehner, H. Kern, R. Gern, M. Baltzer, F. Beyer, A. David, C. Huth, H. Huth, A. Kleffel, H. Lexow, E. Schwandke, P. Wernicke, E. Lange, O. Entzian, C. Probst, E. Hampel, W. Kulinowsky;
25 Silbergroschen: E. Woolenaer;
10 Silbergroschen: E. Rohlwes;

zusammen **204 Thlr. 20 Sgr.**, wofür wir allen Betheiligten aufs herzlichste danken.

6. Das **Schülerstipendium** besaß am 31. December v. J. nach Ausweis der Jahresrechnung für 1871 in Werthpapieren 1050 Thaler und baar 21 Sgr. 5 Pf. Der Zinsertrag desselben ist mit 47 Thlr. 15 Sgr. statutenmäßig zwei würdigen Oberprimanern verliehen worden. Zum Schatzmeister desselben ist nach dem Ausscheiden des Herrn Oberlehrer Schneider Herr Dr. C. Ohrtmann erwählt worden.

7. Der **Stipendienfonds** für abgegangene Zöglinge der Königlichen Realschule war am Schluß des vergangenen Jahres im Besitz einer $5^1/_2$% tragenden ersten Hypothek von 8000 Thalern sowie von 400 Thalern in Staatspapieren und 32 Thlr. $17^1/_2$ Sgr. baar. Er gewährt in diesem Augenblicke schon acht ehemaligen Realschülern, nämlich den Studiosen F. Poske und Kinkeldey und den Bauakademikern F. Lasser, P. Hoffrichter, E. Meyer, A. Brinckmann, O. Stimm und M. Conradi jährlich je hundert Thaler Studienunterstützung. Dies wäre allerdings nicht möglich, wenn nicht die alten Freunde der Stiftung, von denen schon zwei hochverehrte Häupter, der Geh. Commerzienrath A. Mendelssohn und der General-Consul v. Oppenfeldt, uns leider durch den Tod entrissen sind, durch Fortsetzung ihrer jährlichen Beiträge dazu in den Stand gesetzt hätten und auch andere Einnahmen hinzugekommen wären. Es gingen nämlich ein:

a) an **jährlichen Beiträgen:**

50 Thlr. als dritte Gabe von den Herren W. Borchert, Apotheker R. F. Daubitz, Fabrikbesitzer Dr. W. Siemens, Fabrikbesitzer C. Soltmann und Rittergutsbesitzer Dr. Strousberg; als erste Gabe von den Herren Stadtverordneten Halske und Freiherrn v. Magnus auf Drehsa bei Dresden; desgleichen als zweite und dritte Gabe von Herrn Dr. Deter;
25 Thlr. als dritte Gabe von den Herren Oberst-Kämmerer Graf von Redern, Fabrikant J. A. Egells und Fabrikant B. Schäffer;
10 Thlr. als dritte Gabe von den Herren Henning & König und Rentier J. W. Jacquier; als zweite Gabe von Herrn General-Agenten J. Preußner;
5 Thlr. als dritte Gabe von den Herren Banquier Julius Alexander, Fabrikbesitzer F. Jaenecke und Oberlehrer Dr. Sachse; als zweite Gabe von den Herren Professor Dr. H. Gelzer in Basel und Hofphotograph Schüler hierselbst;

b) an **einmaligen Geschenken:**

100 Thlr. von den Herren Rentier Louis Wolff und Ungenannt (eingezahlt durch Herrn Professor Heller);
85 Thlr. von Herrn Hofpianoforte-Fabrikanten W. Biese;
50 Thlr. von den Herren Graf v. Finkenstein auf Ziebingen, Minister Graf W. v. Perponcher im Haag, Banquier J. L. Schwabach, Buchhändler D. Collin und Banquier H. Friedemann;
25 Thlr. von den Herren Benny Löwy, Louis Ackermann, Graf Leo von Bobrinsky (als zweite Gabe) und Brauereibesitzer Eduard Lehmann;

20 Thlr. von Herrn Gustav Markwald;
10 Thlr. von Herrn August Engelhardt;
7 Thlr. 20 Sgr. von Frau L. R.;
6 Thlr. 21 Sgr. = 1 Pfd. St., als zweite Gabe von Herrn Oberst von Rosenberg-Lipinski;
5 Thlr. von Frau Dr. Betzhold, geb. von Ury, und Herrn Rentier Hartz.

Außerdem erhielten wir als Erlös für ein humoristisches Gedicht des Prorectors bis jetzt 80 Thlr., was freilich schwerlich erreicht worden wäre, wenn nicht Manche ihr Exemplar mit mehr als einem Thaler bezahlt hätten, z. B. die Herren Ernst Jacoby, H. S. und Emil Kaselowsky mit je 10 Thalern, Jonas Wolff, G. Bratiano und Rudolf Meyer mit je 5 Thalern, A. Eschwege mit 3 Thalern, H. Friedemann mit 2 Thalern, Carl Jacoby mit 1½ Thaler u. s. w. —

Wir danken den freundlichen Gebern aufs herzlichste und bitten Gott, daß Er auch ferner Seinen Segen auf diese Stiftung legen wolle, die bestimmt ist der Wissenschaft und der höheren Industrie schöne Talente zu erhalten, die für dieselben ohne solche Unterstützung verloren gehen würden. Bis jetzt hat der Fonds 750 Thaler zu diesem Zwecke verausgabt.

C. Verfügungen der Behörden.

1. Vom 11. November 1871. Die Zahl der Schüler in jedem Coetus von Unter-Secunda soll auf je 40 beschränkt werden. Ueber die Zulässigkeit von Ausnahmen will das Königliche Provinzial-Schul-Collegium selbst entscheiden. —

2. Vom 6. Januar 1872. Festsetzung der Ferien:

Ostern,	Schluß am	23. März,	Eröffnung am	8. April,
Pfingsten,	" "	17. Mai,	" "	23. Mai,
Sommer,	" "	6. Juli,	" "	5. August,
Michaelis,	" "	28. September,	" "	14. October,
Weihnacht,	" "	21. December,	" "	6. Januar 1873.

D. Vermehrung des Lehr-Apparates.

1. Die **Lehrerbibliothek** wurde vermehrt durch folgende Werke: Schulblatt für die Provinz Brandenburg, Fortsetzung. — Poggendorf, Annalen, desgl. — Crelle, Journal für Mathematik, desgl. — Zeitschrift des Kgl. Preuß. statistischen Büreaus, desgl. — Zeitschrift für Preuß. Geschichte und Landeskunde. I—IV. u. von 1871 ab. — Reichsgesetzblatt, Fortsetzung. — Revue des deux Mondes, desgl. — Delabar, Anleitung zum Linearzeichnen. 5 Bde. — Kützing, Phycologia generalis. — Whewell, Geschichte der induktiven Wissenschaften, übers. v. Littrow. 3 Bde. — Grant, History of physical astronomy. London 1852. — Schmidt, Lehrbuch der Meteorologie. Leipzig 1860. 2 Bde. — Dove, Gesetz der Stürme; Klimatologische Beiträge; Darstellung der Wärme-Erscheinungen durch 5tägige Mittel. — Thomson u. Tait, Handbuch der Physik, übers. v. Helmholtz u. Werthheim, Braunschw. 1871. — Wurz, Geschichte der chemischen Theorien, deutsch v. Oppenheim. Berl. 1870. — Jahresberichte über die Fortschritte der Chemie, Fortsetzung. — Hoffmann, Encyclopädie der Erd-, Völker- und Staatenkunde. Leipz. 1870. 3 Bde. — Haushofer, Lehrbuch der Statistik. — Berliner Jahrbuch, V. — Peschel, Geschichte des Zeitalters der Entdeckungen. Stuttgart 1858. — Allgemeines Landrecht, herausgegeben v. Koch. 4. Aufl. Berl. 1870. — v. Rönne, Verfassungsrecht des deutschen Reiches. Leipz. 1872. — Der Feldzug von 1866 (Generalstabswerk). 2 Bde. — Friedländer, Darstellungen aus der Sittengeschichte Rom's. Leipz. 1871. 3 Bde. — Kriegk, Deutsches Bürgerthum im Mittelalter. Frankfurt a. M. 1868. I. II. — Kohl, Aus alter und neuer Zeit. — Scherr, Deutsche Cultur- und Sittengeschichte. Leipz. 1870. — Waitz, Deutsche Verfassungsgeschichte. I—IV. — v. Sybel, Geschichte d. franz. Revolution. IV, 2. — Droysen, Geschichte d. preuß. Politik, so weit sie erschienen. — L. v. Ranke, Werke. XIX. XX. XXI. XXIII. — Bescherelle, Dictionnaire national. Paris 1845. u. 46. 2 Bde. — Webster, Illustrated dictionary. London. — Passow, Griech. Lexicon. Neue (5.) Auflage. 3 Bde. — Forcellini, Tot. latinitatis lexicon. Schneeberg 1831. 4 Bde. — Diez, Etymolog. Wörterbuch der roman. Sprachen. Bonn 1869. 70. 2 Bde. — J. Grimm, Kleinere Schriften. IV, V. — Grimm, Deutsches Wörterbuch, Fortsetzung. — Lexer, Mittelhochdeutsches Wörterbuch, Fortsetzung. — Sanders, Wörterbuch der deutschen Sprache. Leipz. 1860—65. 3 Bde. — Genée, Geschichte der Shakespeare'schen Dramen in Deutschland. Leipzig 1870. — Scherr, Bildersaal der

Weltliteratur. Stuttg. 1869. 2 Bde. — Scherr, Allgemeine Geschichte der Literatur. Stuttg. 1869. 2 Bde. — Bartsch, Grundriß der Geschichte der provenzalischen Literatur. Elberfeld 1872. — Poggendorf, Biographisch-literarisches Handwörterbuch. Leipz. 1863. 2 Bde. — Klinkerfues, Theoretische Astronomie. Braunschw. 1871. 1. Lfrg. — Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Berlin 1871. — Gauß, Werke. III. V. VII.

An Geschenken, für welche wir den Gebern hiermit unsern besten Dank sagen, erhielt die Bibliothek vom Prorector: Herrig, Archiv für neuere Sprachen, Fortsetzung. — Chronik der Königl. Gewerbe-Akademie in Berlin, von Nottebohm. — Drei Schriften zur Realschulfrage. — Menzel, Geschichte des rheinischen Städtebundes. — Vom Collegen Ohrtmann: Desert, Tafeln zur Berechnung rechtwinkliger Coordinaten. Berlin 1868. — Von den Verfassern oder Herausgebern: Kawerau u. Kluge, Mittheilungen über das Turnen in der Kgl. Central-Turnanstalt aus den Jahren 1851—60. — Ohrtmann u. Müller, Fortschritte der Mathematik seit dem Erscheinen. — Vom Kgl. Ober-Bergamt: Uebersicht über die Produktion der Bergwerke, Salinen und Hütten im preuß. Staate 1868—69.

2. Für das **physikalische** und **chemische** Cabinet wurden angeschafft eine Serie Knapp'scher Wandtafeln, ein Platintiegel, ein Kohlenfilter und verschiedene Glasgeräthschaften.

3. Die **Naturalien-Sammlung** erhielt als dankbar angenommenes Geschenk von unsrem ehemaligen Collegen Herrn Dr. Zenker: einen gesprengten Schädel, einen Kinderschädel, den Schädel eines Erwachsenen, zwei See-Igel und eine Anzahl Muscheln.

4. Die **Musikalien-Sammlung** wurde vermehrt durch Anschaffung von Ferd. Schulz, der 84. Psalm „Wie lieblich 2c." und von Edwin Schulz, Wilhelm der Siegreiche, Beides vierstimmig.

5. Die **Schüler-Lese-Bibliothek** ist im verwichenen Jahre von 119 + 108 + 120 + 123, zusammen von 470 Schülern benutzt worden. Vermehrt wurde dieselbe um folgende Bücher: Delitzsch, Aus allen Welttheilen; v. Berneck, Die Welt in Waffen; Otto, Das Buch vom alten Fritz; ders., Das Tabacks-Collegium; Goldschmidt, Geschichten aus Livius; Schmidt, Der Franzosenkrieg; Fechner, Der deutsch-französische Krieg; Bösche, Unsere Hausthiere; Mohl, Seltsame Geschichten; Wagener, Das Nibelungenlied; Petsch, Fahrten des Knaben F. W. Schulze; André, Unsere Nordpolfahrer; Stoll, Bilder aus dem altrömischen Leben; Spamer, Kosmos für die Jugend; Hiltl, Der alte Derfflinger; ders., Der Münzthurm; Jugendschriften von Hoffmann, Pichler und Stöber u. s. w. Bei der Vertheilung der Bücher waren mit größter Ausdauer und Pünktlichkeit zur Hand: im S. die Abiturienten Schwarz und Wonnberger, im W. der Abiturient Mantey und der Primaner Sprenger. März-Abschluß 1872:

Einnahme	137 Thlr.	18 Sgr.	5 Pf.
Ausgabe	76 „	25 „	6 „
Bestand	60 Thlr.	22 Sgr.	11 Pf.

6. Die **Schulbücher-Leihbibliothek** hat auch in diesem Jahre reichliche Beiträge an Büchern und Geld erhalten, so daß 45 Schülern 270 Bücher geliehen werden und dem Schülerstipendium 114 Thlr. 11 Sgr. 6 Pf. in baarem Gelde zugeführt werden konnten.

7. Die **Schüler-Bibliothek** der **Kgl. Vorschule** wurde im verflossenen Jahre von 79 Schülern benutzt. Außer einigen Ergänzungen ausgeschiedener Bücher wurde die Zahl der Bände durch Neuanschaffungen um die Nummern 591—600 vermehrt. Die Einnahmen betrugen 13 Thlr. 15 Sgr. 6 Pf., die Ausgaben 13 Thlr. 4 Sgr. 6 Pf., so daß ein Bestand von 11 Sgr. verblieb.

8. Die **Schülerinnen-Bibliothek** wurde im verflossenen Jahre durchschnittlich von 40 bis 50 Schülerinnen benutzt. Der Jahresschluß pro 1871 weist eine Einnahme von 39 Thlr. 20 Sgr. 3 Pf. und eine Ausgabe von 22 Thlr. 12 Sgr. nach. Es bleibt demnach ein Bestand von 17 Thlr. 8 Sgr. 3 Pf. baar und 200 Thlr. in Berliner Stadt-Obligationen. Zahl der Bände ca. 1680. An dankbar angenommenen Geschenken gingen ein: F. Becker, Wortbildungslehre — vom Lehrer Herrn Warlitz; Fr. Wetzel, Heimatskunde — vom Verf. —

9. Die **naturwissenschaftlichen Sammlungen** der Elisabethschule erhielten eine wichtige Vermehrung durch ein dankbar entgegengenommenes Geschenk des Herrn Prorector Prof. Dr. Strack, bestehend in einem Mikroskop nebst reichlicher Auswahl von Präparaten aus dem Reiche der Pflanzen und niederen Thiere. Für die **Physik** wurde eine vollständige Sammlung der wichtigsten akustischen Apparate erworben. —

E. Statistische Nachrichten.

Am Schlusse des abgelaufenen Schuljahres waren in den vereinigten Anstalten zusammen 2307 Schüler und Schülerinnen, von denen sich in der Königl. Realschule 714, im Königl. Friedrich-Wilhelms-Gymnasium 637, in der Königl. Vorschule 544 und in der Königl. Elisabethschule 512 befanden. Von diesen waren 1) in der Realschule in I: 29, in IIA: 37, in IIB1: 52, in IIB2: 52,

in IIIA1: 49, in IIIA2: 54, in IIIB1: 54, in IIIB2: 51, in IV1: 56, in IV2: 56, in V1: 53, in V2: 55, in VI1: 58, in VI2: 58; 2) im Gymnasium in IA: 25, in IB: 30, in IIA: 35, in IIB1: 33, in IIB2: 34, in IIIA1: 42, in IIIA2: 38, in IIIB1: 49, in IIIB2: 49, in IV1: 51, in IV2: 54, in V1: 53, in V2: 51, in VI1: 52, in VI2: 51; 3) in der Vorschule in IA: 55, in IB: 57, in IIA: 58, in IIB: 57, in IIIA: 56, in IIIB: 57, in IVA: 55, in IVB: 55, in VA: 47, in VB: 47; 4) in der Elisabethschule in I: 33, in II: 41, in III: 50, in IVA: 51, in IVB: 52, in VA: 48, in VB: 51, in VIA: 49, in VIB: 57, in VIIA: 46, in VIIB: 34.

F. Ordnung der Feierlichkeiten.

I. Realschule.

Donnerstag den 21. März,

Nachmittag von 2½ Uhr an.

Prüfung.

Sexta II. Latein. Candidat Großmann.
Quinta II. Rechnen. Dr. Müller.
Quarta II. Naturgeschichte. Dr. Löw.

Sexta II. Naturgeschichte. Candidat Berent.
Quinta II. Französisch. Lehrer Fiege.
Quarta I. Geographie. Dr. Freytag.

Abends 7 Uhr.

Musikaufführung zur Vorfeier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs, veranstaltet vom Gesanglehrer Hrn. Preiß.

Freitag den 22. März,

früh 9½ Uhr.

Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers und Königs.

Entlassung der Abiturienten durch den Director.

II. Vorschule.

Sonnabend den 23. März,

Nachmittag von 2½ Uhr an.

Prüfung.

Fünfte Klasse.	Coet. I.	Lesen und Rechnen. Lehrer Streithorst.
	Coet. II.	Religion. Lehrer Schiller.
Vierte Klasse.	Coet. I.	Lesen und Sprechübungen. Lehrer Dr. Dallwitz.
	Coet. II.	Rechnen. Lehrer Werdermann.
Dritte Klasse.	Coet. I.	Heimatskunde. Lehrer Lüben.
	Coet. II.	Deutsch. Lehrer Arndt.
Zweite Klasse.	Coet. I.	Geographie. Lehrer Lübcky.
	Coet. II.	Rechnen. Lehrer Pache.
Erste Klasse.	Coet. I.	Deutsch. Oberlehrer Dr. Schnell.
	Coet. II.	Religion. Lehrer Schmidt.

Zur Besprechung über Schul-Angelegenheiten wird vom 25. bis 27. März in den Vormittagsstunden bereit sein: für das Gymnasium der Unterzeichnete, für die Realschule Herr Prorector Dr. Strack, im Amtszimmer Kochstraße Nr. 66., für die Vorschule Herr Oberlehrer Dr. Schnell, im Amtszimmer Kochstraße Nr. 66., für die Elisabethschule Herr Professor Dr. Schönermark, Kochstraße Nr. 65.

Der Sommer-Cursus beginnt in sämmtlichen Anstalten am 8. April.

Ranke.